CAS-opskrifter (A-niveau)

Version: 10. maj 2021

1. Funktioner (Nspire)

1.1 Definér funktion

Problem

Du ønsker at definere en funktion således at du kan arbejde med den.

Løsning

Skriv funktionsforskriften (med et kolon foran lighedstegnet!) og tryk så ENTER.

Eksempel 1.1.1: Definér funktion og bestem funktionsværdi

En funktion f er givet ved

$$f(x) = x^3 + 2x - 10.$$

Bestem $f(53)$.

Først defineres funktionen:

$$\mathrm{f}(x) := x^3 + 2 \cdot x - 10 \;\blacktriangleright\; \mathit{Udført}$$

Nu hvor funktionen er defineret, kan man indtaste $f(53)$ for at bestemme denne funktionsværdi:

$$\mathrm{f}(53) \;\blacktriangleright\; 148973$$

Altså er $f(53) = 148973$.

Hvis du også ønsker at angive funktionens definitionsmængde, skal du bruge en lodret streg ligesom i Eksempel 1.1.2 nedenfor.

$$f(x) = x - \frac{1}{x}, \quad \overbrace{x > 0}^{\text{definitionsmængde}}$$

Eksempel 1.1.2: Funktion med definitionsmængde

En funktion f er givet ved

$$f(x) = x - \frac{1}{x}, \qquad x > 0$$

Bestem $f(3)$.

Først defineres funktionen:

$$f(x) := x - \frac{1}{x} \mid x > 0 \blacktriangleright \mathit{Udført}$$

Nu hvor funktionen er defineret, kan man indtaste $f(3)$ for at bestemme denne funktionsværdi:

$$f(3) \blacktriangleright \frac{8}{3}$$

Altså er $f(3) = \frac{8}{3}$.

Tip: Symbolet "lodret streg"
Symbolet "lodret streg" kan på Mac indsættes ved at trykke `Alt+I`; på Windows kan det indsættes ved at trykke `AltGr+`*(knappen til venstre for backspace)*. Alternativt kan symbolet findes ved at klikke på 📖 og vælge *Tegn*.

1.2 Bestem funktionsværdi

Problem

Du ønsker at bestemme en funktionsværdi som $f(53)$ eller $\sin(30)$.

Løsning

Hvis funktionen ikke er indbygget i Nspire (sådan som fx sinus og cosinus er), skal du først definere funktionen (Opskrift 1.1). Derefter kan du bare skrive $f(53)$ og trykke ENTER (hvis altså funktionen hedder f og du ønsker udregne funktionsværdien i 53). Se eksemplerne nedenfor.

Eksempel 1.2.1: Definér funktion og bestem funktionsværdi

En funktion f er givet ved $f(x) = x^2 + 1$. Bestem $f(7)$.

Først defineres funktionen:

$$\mathrm{f}(x):=x^2+1 \ \blacktriangleright \ \mathit{Udført}$$

Nu hvor funktionen er defineret, kan man indtaste $f(7)$ for at bestemme denne funktionsværdi:

$$\mathrm{f}(7) \ \blacktriangleright \ 50$$

Altså er $f(7) = 50$.

For en indbygget funktion som sinus kan man bare skrive $\sin(30)$ og trykke ENTER, ligesom i Eksempel 1.2.2.

Eksempel 1.2.2: Bestem funktionsværdi for indbygget funktion

Bestem $\sin(30°)$ og $\sin^{-1}(0{,}5)$ og e^3.

Det første tal kan bestemmes ved at indtaste $\sin(30)$ efterfulgt af ENTER:

$$\sin(30) \ \blacktriangleright \ \frac{1}{2}$$

Funktionen $\sin^{-1}$ kan findes ved at klikke på og vælge *Katalog* (alternativt kan man skrive **arcsin**):

$$\arcsin(0.5) \ \blacktriangleright \ 30.$$

Den naturlige eksponentialfunktion kan findes ved at klikke på og vælge *Matematikskabeloner* (alternativt kan man skrive **exp**):

$$\exp(3) \ \blacktriangleright \ 20.0855$$

Tip: Tilnærmet værdi
Hvis man vil have tal som e^3 vist som decimaltal, så skal man trykke CTRL+ENTER (eller CMD+ENTER på Mac) i stedet for blot ENTER.

Husk at tjekke vinkelindstillingen når du udregner sinus- og cosinus-værdier. I bunden af Nspire-vinduet står der GRD hvis vinkelindstillingen er sat til grader; der står RAD hvis den er sat til radianer. Man kan ændre vinkelindstillingen ved at dobbeltklikke på teksten *Indstillinger* i bunden af vinduet og så vælge *Vinkel* → *Grad* eller *Vinkel* → *Radian*.

1.3 Tegn graf for funktion

Problem

Du ønsker at tegne grafen for en funktion.

Løsning

Indtast funktionens forskrift i applikationen *Grafer*. Se eksemplerne nedenfor.

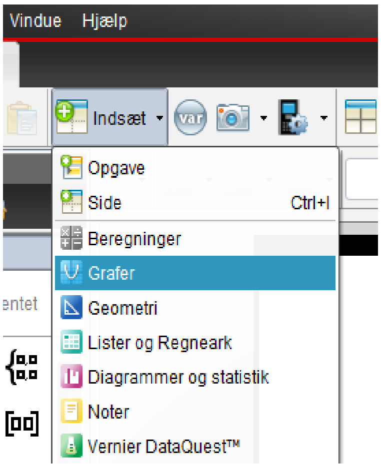
Eksempel 1.3.1: Tegn grafen for en funktion

En funktion f er givet ved

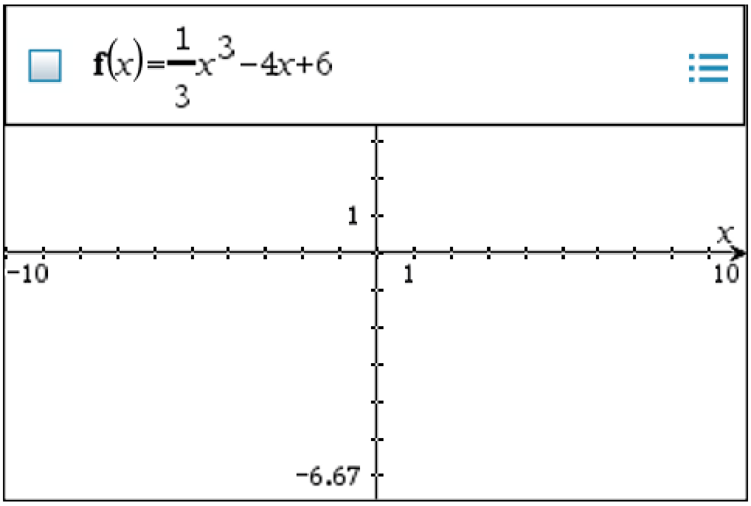
$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x + 6.$$

Tegn grafen for f.

1. Tilføj applikationen *Grafer*:



2. Indtast funktionsforskriften i toppen af applikationen og tryk ENTER:



3. Indstil vinduet således at “interessante” dele af grafen bliver vist (fx nulpunkter og ekstremumspunkter). Dette kan man gøre ved at klikke på og så vælge *Vindue/Zoom* → *Indstillinger for vindue*. Her bør man indstille hvor x-aksen løber fra og til (XMin og XMax) samt hvor y-aksen løber fra og til (YMin og YMax).

Tjek variabelnavnet!
I applikationen *Grafer* **skal** den uafhængige variabel hedde x. Hvis man for eksempel får givet funktionen $f(t) = t^2 - 1$, så bliver man nødt til at omdøbe t til x, dvs. man skal indtaste $f(x) = x^2 - 1$.

Hvis du gerne vil angive funktionens definitionsmængde, kan du bruge en lodret streg; se Eksempel 1.3.2.

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 144x + 140, \quad \overbrace{-15 \le x \le 11}^{\text{definitionsmængde}}$$

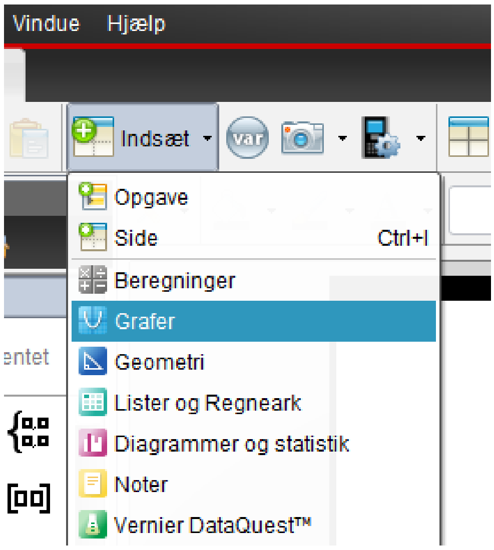
Eksempel 1.3.2: Tegn graf for funktion med bestemt definitionsmængde

En funktion f er givet ved

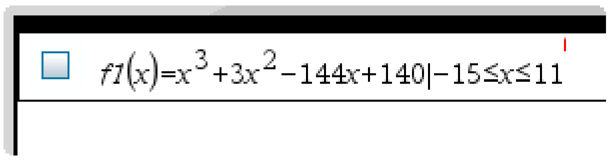
$$f(x) = t^3 + 3t^2 - 144t + 140, \qquad -15 \le t \le 11.$$

Tegn grafen for f.

1. Tilføjer applikationen *Grafer*:



2. Klik på, vælg *Grafindtastning/Redigér* → *Funktion* og indtast så funktionsforskriften i toppen af applikationen:



3. Indstil vinduet. Dette kan man gøre ved at klikke på og så vælge *Vindue/Zoom* → *Indstillinger for vindue*. Her bør man indstille x-aksen så den passer med definitionsmængden (så i dette tilfælde bør man sætte XMin og XMax til hhv. -15 og 11). Man bør også indstille y-aksen således at "interessante" dele af grafen bliver vist (juster YMin og YMax indtil du er tilfreds).

Tip: Symbolet "lodret streg"
Symbolet "lodret streg" kan på Mac indsættes ved at trykke `Alt+I`; på Windows kan det indsættes ved at trykke `AltGr+`*(knappen til venstre for backspace)*. Alternativt kan symbolet findes ved at klikke på og vælge *Tegn*.

1.4 Find skæringspunkter mellem to grafer

Problem

Du kender forskrifter for to funktioner f og g, og du ønsker at finde ud af hvor (eller om) deres grafer skærer hinanden.

Løsning

Definér funktionerne (Opskrift 1.1) og brug så `solve` til at løse ligningen $f(x) = g(x)$, jf. Opskrift 2.1. Dette giver x-koordinaterne til de punkter hvor graferne skærer hinanden. Ved at indsætte disse x-koordinater i forskriften for en af funktionerne får man y-koordinaterne til skæringspunkterne.

Eksempel 1.4.1: Bestem skæringspunkter mellem to grafer

To funktioner f og g er givet ved

$$f(x) = x^3 - 4x^2 - 8x + 12$$
$$g(x) = -x + 2$$

Bestem koordinatsættene til skæringspunkterne mellem graferne for f og g.

1. Definér funktionerne (Opskrift 1.1):

$$\mathbf{f}(x) := x^3 - 4 \cdot x^2 - 8 \cdot x + 12 \;\blacktriangleright\; \textit{Udført}$$

$$\mathbf{g}(x) := -x + 2 \;\blacktriangleright\; \textit{Udført}$$

2. Find x-koordinaterne til grafernes skæringspunkter ved at løse ligningen $f(x) = g(x)$. Dette klares ved hjælp af kommandoen `solve` (Opskrift 2.1):

$$\text{solve}(\mathbf{f}(x) = \mathbf{g}(x), x) \;\blacktriangleright\; x=-2 \text{ or } x=1 \text{ or } x=5$$

3. Det ses at ligningen $f(x) = g(x)$ har 3 løsninger: nemlig -2, 1 og 5. Dette betyder at graferne skærer hinanden i 3 punkter, og at x-koordinaterne til disse punkter er hhv. -2, 1 og 5. Vi finder de tilhørende y-koordinater ved at indsætte x-koordinaterne i en af funktionsforskrifterne; her vælger vi g (men vi kunne lige så vel have valgt f):

$$\mathbf{g}(-2) \;\blacktriangleright\; 4$$

$$\mathbf{g}(1) \;\blacktriangleright\; 1$$

$$\mathbf{g}(5) \;\blacktriangleright\; -3$$

Koordinatsættene til skæringspunkterne mellem graferne for f og g er altså:

$$(-2{,}4),\ (1{,}1) \text{ og } (5,-3).$$

2. Ligninger (Nspire)

2.1 Løs ligning

Problem

Du ønsker at løse en ligning med én ubekendt.

Løsning

Brug kommandoen **solve** som vist i Eksempel 2.1.1.

Eksempel 2.1.1: Løs ligning
Løs ligningen $x^3 - 4x^2 + x + 6 = 0$.
Ligningen løses ved hjælp af kommandoen `solve`: $$\text{solve}(x^3-4\cdot x^2+x+6=0,\ x) \blacktriangleright x=-1 \text{ or } x=2 \text{ or } x=3$$ **(Bemærk at man til sidst i `solve` skal skrive et komma efterfulgt af navnet på den ubekendte, der i dette tilfælde er `x`).** Ligningen har altså tre løsninger, nemlig -1 og 2 og 3.

Fejl: For få argumenter
Når man bruger kommandoen **solve**, skal man efter ligningen skrive et komma, og efter kommaet skal man skrive navnet på den ubekendte. Hvis man glemmer at gøre dette, så får man en fejl om "for få argumenter".

Hvis den ubekendte eksempelvis hedder t og ikke x, så skal man skrive t efter kommaet; se Eksempel 2.1.2 nedenfor.

Eksempel 2.1.2: Løs ligning hvor den ubekendte ikke hedder x

Løs ligningen $t^4 = 9t^2 - 4t - 12$.

Ligningen løses ved hjælp af kommandoen `solve`:

$$\text{solve}(t^4 = 9 \cdot t^2 - 4 \cdot t - 12,\ t) \blacktriangleright t = -3 \text{ or } t = -1 \text{ or } t = 2$$

(Bemærk at man til sidst i `solve` skal skrive et komma efterfulgt af navnet på den ubekendte, der i dette tilfælde er `t`).

Ligningen har altså tre løsninger, nemlig -3 og -1 og 2.

Hvis man kun er interesseret i de løsninger der opfylder en bestemt betingelse, kan man fortælle dette til Nspire ved at sætte en lodret streg efter `solve`. Se Eksempel 2.1.3.

Eksempel 2.1.3: Find løsninger der opfylder en bestemt betingelse

Find de *positive* løsninger til ligningen $x^7 - 14x^5 + 49x^3 - 36x = 0$.

Ligningen løses ved hjælp af kommandoen `solve`, og betingelsen angives med en lodret streg efter `solve`:

$$\text{solve}(x^7 - 14 \cdot x^5 + 49 \cdot x^3 - 36 \cdot x = 0,\ x) \mid x > 0 \blacktriangleright x = 1 \text{ or } x = 2 \text{ or } x = 3$$

Ligningen har altså tre positive løsninger, nemlig 1 og 2 og 3.

Tip: Symbolet "lodret streg"
Symbolet "lodret streg" kan på Mac indsættes ved at trykke `Alt+I`; på Windows kan det indsættes ved at trykke `AltGr+`*(knappen til venstre for backspace)*. Alternativt kan symbolet findes ved at klikke på 📖 og vælge *Tegn*.

2.2 Løs to ligninger med to ubekendte

Problem

Du ønsker at løse to ligninger med to ubekendte.

Løsning

Brug kommandoen **`solve`** som vist i Eksempel 2.2.1.

Eksempel 2.2.1: Løs to ligninger med to ubekendte
Løs ligningssystemet $$\begin{aligned} -x + 2y &= 2 \\ 3x - y &= 9 \end{aligned}$$
Ligningssystemet løses ved hjælp af kommandoen `solve`. Begge ligninger skrives ind, adskilt af ordet `and`: $$\text{solve}(-x+2\cdot y = 2 \text{ and } 3\cdot x-y = 9, x, y) \blacktriangleright x=4 \text{ and } y=3$$ **(Bemærk at man til sidst i `solve` skal skrive et komma efterfulgt af navnene på de ubekendte, der i dette tilfælde er x og y).** Ligningssystemet har altså én løsning, nemlig $x = 4$, $y = 3$.

2.3 Isolér ubekendt i ligning

Problem

Du ønsker at isolere en ubekendt i en ligning.

Løsning

Brug kommandoen `solve` som vist i Eksempel 2.3.1.

Eksempel 2.3.1: Isolér ubekendt i ligning
Isolér x i formlen $\frac{2+y}{x} - 1 = y$.
Den ubekendte x isoleres ved hjælp af kommandoen `solve`: $$\text{solve}\left(\frac{2+y}{x} - 1 = y, x\right) \blacktriangleright\ x = \frac{y+2}{y+1}$$ **(Bemærk at man til sidst i `solve` skal skrive et komma efterfulgt af navnet på den ubekendte man vil isolere, der i dette tilfælde er `x`).** Af svaret fremgår det at når man isolerer x i formlen, så får man $x = \frac{y+2}{y+1}$.

3. Trigonometri (Nspire/WordMat)

Husk at tjekke vinkelindstillingen når du udregner sinus- og cosinus-værdier. I bunden af Nspire-vinduet står der GRD hvis vinkelindstillingen er sat til grader; der står RAD hvis den er sat til radianer. Man kan ændre vinkelindstillingen ved at dobbeltklikke på teksten *Indstillinger* i bunden af vinduet og så vælge *Vinkel → Grad* eller *Vinkel → Radian*.

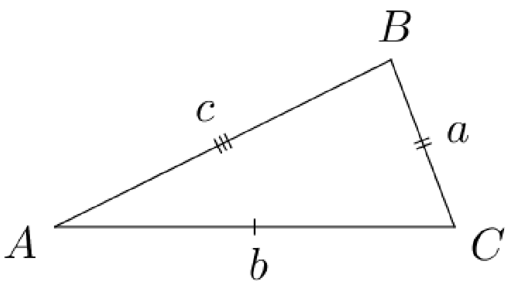
3.1 Kender alle tre sider

Problem

Du kender alle tre sidelængder i en trekant og ønsker at finde en eller flere af vinklerne i trekanten.

Løsning

Brug cosinusrelationerne:



$$\cos(A) = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

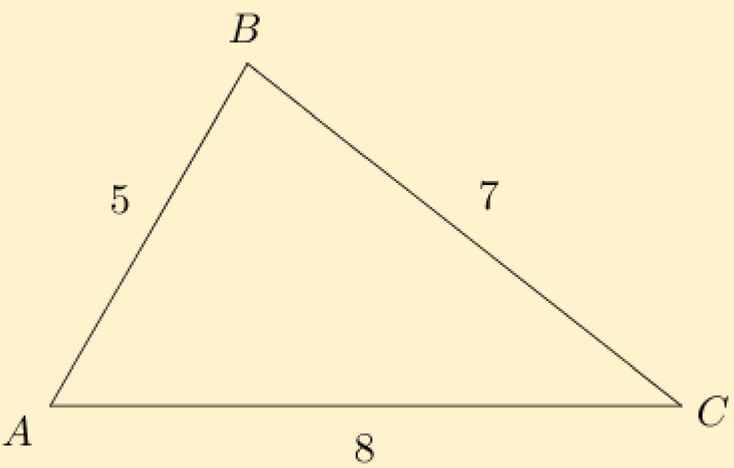
$$\cos(B) = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

$$\cos(C) = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

Se Eksempel 3.1.1.

Eksempel 3.1.1: Kender alle tre sider i en trekant

Figuren viser en trekant *ABC* hvor $a = 7$, $b = 8$ og $c = 5$:



Bestem vinklerne i trekanten.

Først definerer vi a, b og c:

$$\mathbf{a}:=7 \;\blacktriangleright\; 7$$

$$\mathbf{b}:=8 \;\blacktriangleright\; 8$$

$$\mathbf{c}:=5 \;\blacktriangleright\; 5$$

Derefter bruger vi cosinusrelationen $\cos(A) = (b^2 + c^2 - a^2)/(2bc)$ til at finde vinkel A:

$$\cos^{-1}\left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2 \cdot b \cdot c}\right) \;\blacktriangleright\; 60$$

Altså er $A = 60°$. På tilsvarende vis kan man bestemme de andre vinkler.

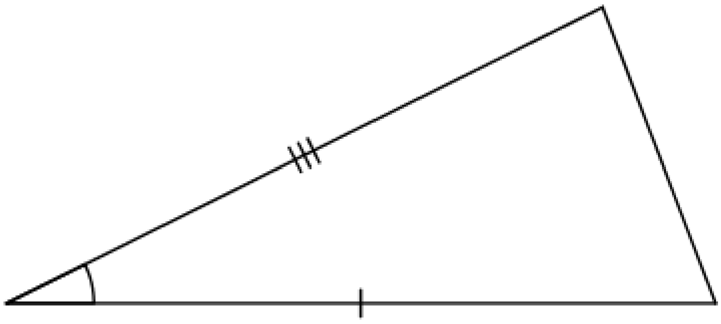
Tip: cos^{-1}

- Husk at tjekke din vinkelindstilling når du bruger funktionerne cos^{-1} og sin^{-1} (se ovenfor).
- Man kan skrive **arccos** i stedet for **cos^{-1}**. Alternativt kan man finde cos^{-1} ved at klikke på 📖 og vælge *Katalog*.

3.2 Kender to sider og den mellemliggende vinkel

Problem

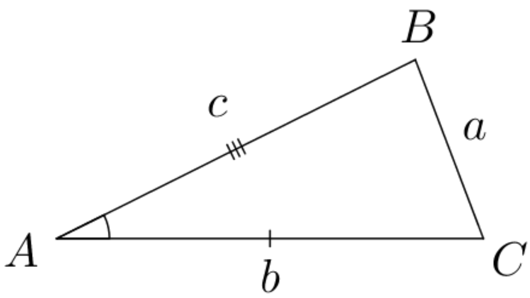
I en trekant kender du to sider og en mellemliggende vinkel:



Du ønsker at finde den sidste side og/eller de resterende vinkler.

Løsning

Brug cosinusrelationerne:



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(A)$$

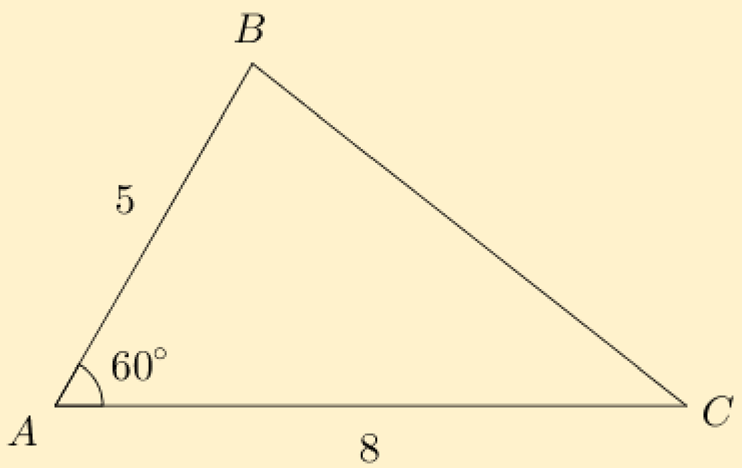
$$\cos(B) = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2 \cdot a \cdot c}$$

$$\cos(C) = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2 \cdot a \cdot b}$$

Se Eksempel 3.2.1.

Eksempel 3.2.1: Kender to sider og den mellemliggende vinkel i en trekant

Figuren viser en trekant ABC hvor $b = 8$, $c = 5$ og $A = 60°$:



Bestem sidelængden a samt vinklerne B og C.

Vi bestemmer a ved at bruge cosinusrelationen $a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(A)$:

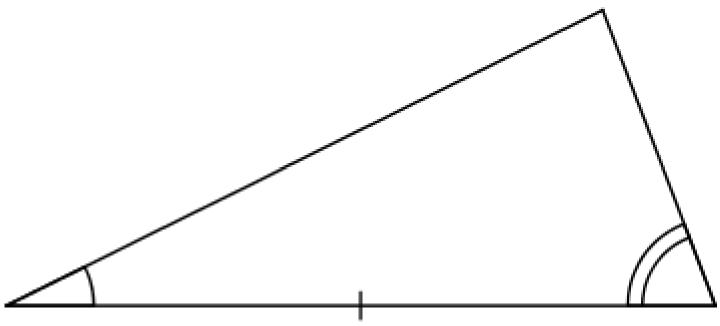
$$\text{solve}(a^2 = 8^2+5^2-2\cdot 8\cdot 5\cdot \cos(60),\ a) \ \blacktriangleright\ a=-7 \text{ or } a=7$$

Da sidelængden ikke kan være negativ, kan vi konkludere at $a = 7$. Vi kender nu alle tre sidelængder i trekanten og kan bestemme de resterende vinkler ved at gå frem som i Opskrift 3.1.

3.3 Kender to vinkler og den mellemliggende side

Problem

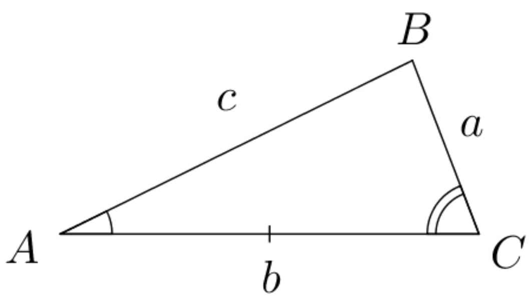
I en trekant kender du to vinkler og den mellemliggende side:



Du ønsker at bestemme den sidste vinkel og/eller de resterende sider.

Løsning

Find den sidste vinkel ved at udnytte at vinkelsummen i en trekant er 180°. Brug derefter sinusrelationerne til at finde de resterende sider:



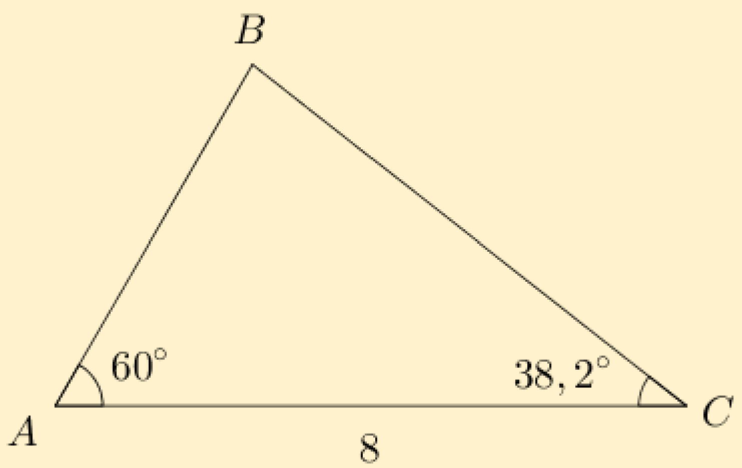
$$B = 180° - (A + C)$$

$$\frac{a}{\sin(A)} = \frac{b}{\sin(B)} = \frac{c}{\sin(C)}$$

Se Eksempel 3.3.1.

Eksempel 3.3.1: Kender to vinkler og den mellemliggende side i en trekant

Figuren viser en trekant ABC hvor $A = 60°$, $b = 8$ og $C = 38{,}2°$:



Bestem vinkel B samt siderne a og c.

Først finder vi vinkel B:

$$180-(60+38.2) \;\blacktriangleright\; 81.8$$

Altså er $B = 81{,}8°$.

Herefter kan vi finde a ved at bruge sinusrelationen $a/\sin(A) = b/\sin(B)$:

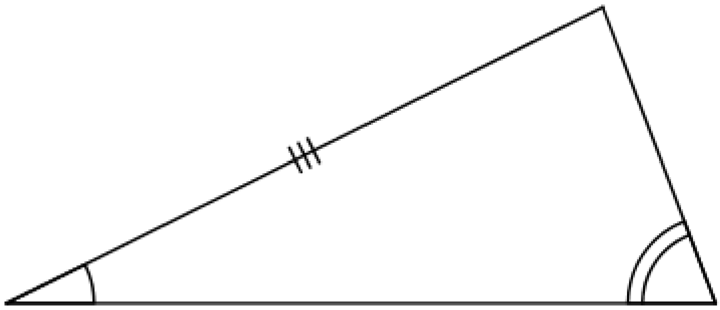
$$\text{solve}\left(\frac{a}{\sin(60)} = \frac{8}{\sin(81.8)}, a\right) \;\blacktriangleright\; a = 6.99977$$

Altså er $a \approx 7$. Man kan finde c på samme måde.

3.4 Kender to vinkler og ikke-mellemliggende side

Problem

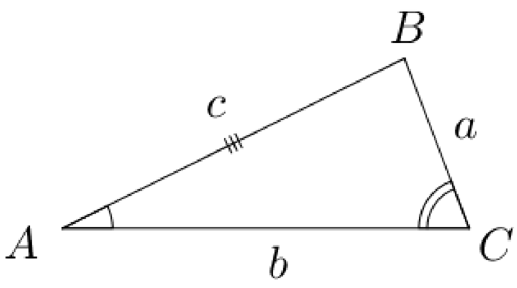
I en trekant kender du to vinkler og en ikke-mellemliggende side:



Du ønsker at finde den sidste vinkel og/eller de resterende sider.

Løsning

Find den sidste vinkel ved at udnytte at vinkelsummen i en trekant er 180°. Brug sinusrelationerne til at finde de resterende sider:



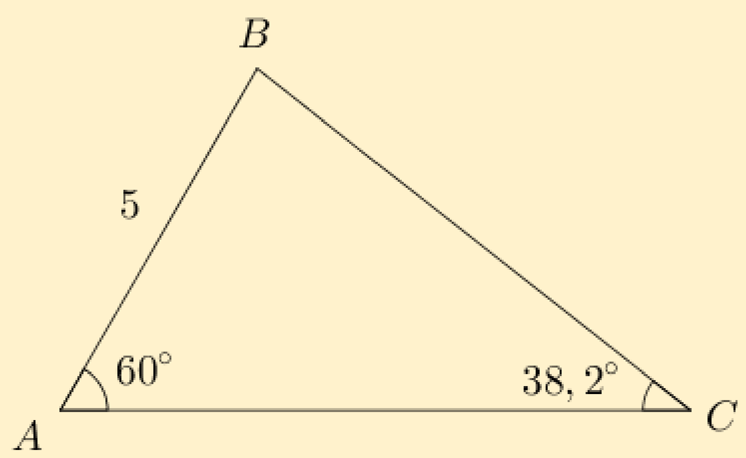
$$B = 180^\circ - (A + C)$$

$$\frac{a}{\sin(A)} = \frac{b}{\sin(B)} = \frac{c}{\sin(C)}$$

Se Eksempel 3.4.1.

Eksempel 3.4.1: Kender to vinkler og en ikke-mellemliggende side

Figuren viser en trekant ABC hvor $A = 60°$, $C = 38{,}2°$ og $c = 5$:



Bestem vinkel B samt siderne a og b.

Først finder vi a ved at bruge sinusrelationen $a/\sin(A) = c/\sin(C)$:

$$\text{solve}\left(\frac{a}{\sin(60)} = \frac{5}{\sin(38.2)}, a\right) \blacktriangleright \; a = 7.00205$$

Altså er $a \approx 7$. Herefter finder vi vinkel B:

$$180-(60+38.2) \blacktriangleright \; 81.8$$

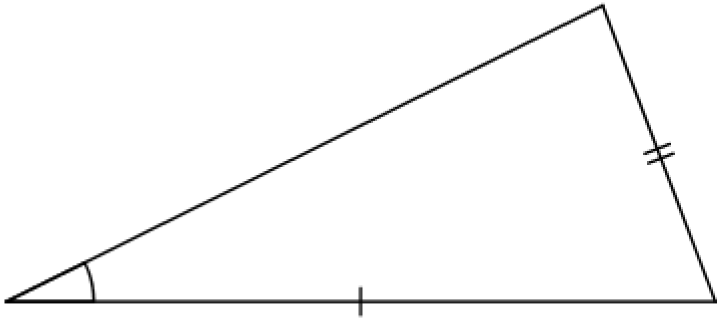
Altså er $B = 81{,}8°$.

Vi kan nu finde b på samme måde som vi fandt a.

3.5 Kender to sider og ikke-mellemliggende vinkel

Problem

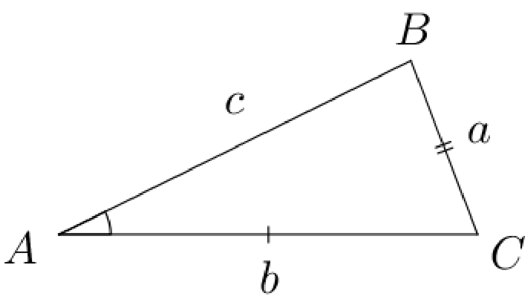
I en trekant kender du to sider og en ikke-mellemliggende vinkel:



Du ønsker at finde den sidste side og/eller de resterende vinkler.

Løsning

Brug sinusrelationerne, og vær opmærksom på at der kan være to mulige løsninger.

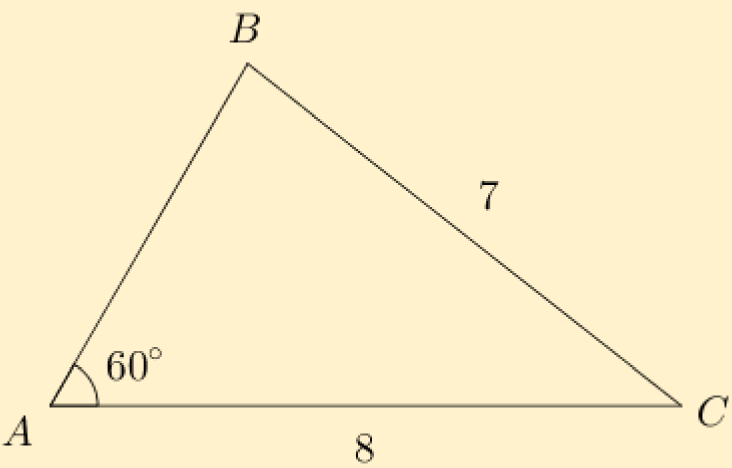


$$\frac{\sin(A)}{a} = \frac{\sin(B)}{b} = \frac{\sin(C)}{c}$$

Se Eksempel 3.5.1.

Eksempel 3.5.1: Kender to sider og en ikke-mellemliggende vinkel

Figuren viser en trekant ABC hvor $A = 60°$, $a = 7$ og $b = 8$:



Bestem c samt vinklerne B og C idet det oplyses at vinkel B er spids.

Først finder vi B ved at bruge sinusrelationen $\sin(A)/a = \sin(B)/b$:

$$\text{solve}\left(\frac{\sin(60)}{7} = \frac{\sin(x)}{8}, x\right) \mid 0 < x < 90 \;\blacktriangleright\; x = 81.7868$$

(Vi bruger her en lodret streg til at fortælle programmet at det kun skal søge efter spidse vinkler, altså vinkler der er mellem 0° og 90°. Se Eksempel 2.1.3).

Altså er $B \approx 81{,}8°$. Vi kan nu finde vinkel C ved at udnytte at vinkelsummen i trekanten er 180°:

$$180-(60+81.7868) \;\blacktriangleright\; 38.2132$$

Altså er $C \approx 38{,}2°$. Siden c kan findes ved at bruge sinusrelationen $a/\sin(A) = c/\sin(C)$:

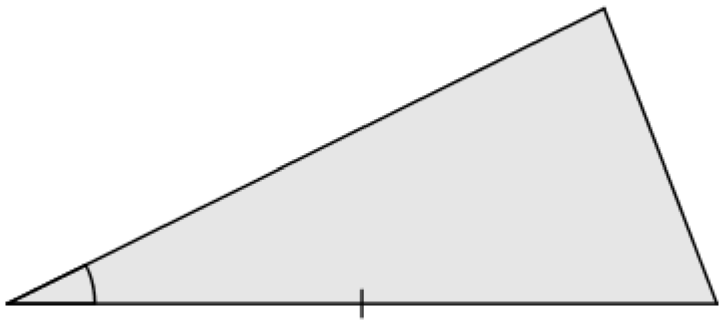
$$\text{solve}\left(\frac{7}{\sin(60)} = \frac{c}{\sin(38.2132)}, c\right) \;\blacktriangleright\; c = 5.$$

Altså er $c = 5$.

3.6 Kender areal, vinkel og side

Problem

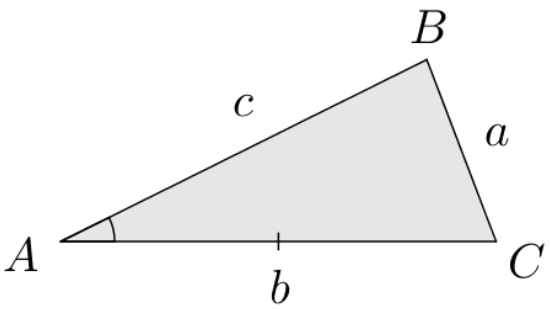
Du kender arealet af en trekant. Yderligere kender du en vinkel i trekanten, og du kender en side der grænser op til denne vinkel:



Du ønsker at finde de resterende sider og/eller vinkler i trekanten.

Løsning

Brug arealformlen for vilkårlige trekanter til at finde den anden side der grænser op til den kendte vinkel. Følg derefter Opskrift 3.2.

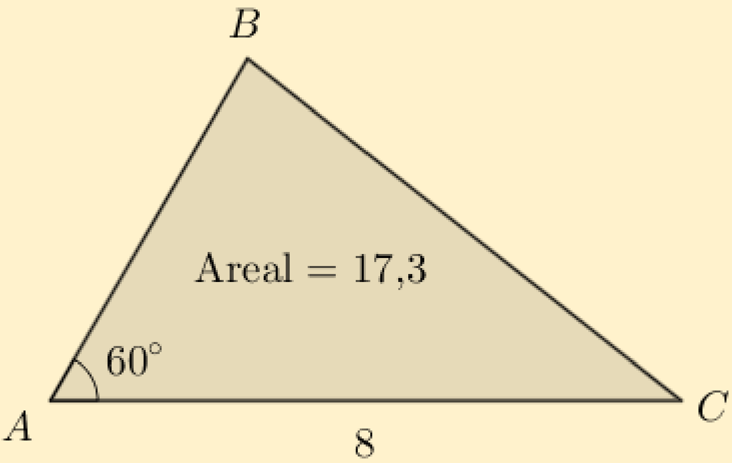


$$T = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot sin(A)$$

Se Eksempel 3.6.1.

Eksempel 3.6.1: Kender areal, vinkel og side i en trekant

Figuren viser en trekant *ABC* hvor $A = 60°$ og $b = 8$. Arealet af trekanten er 17,3:



Bestem siderne a og c, og bestem vinklerne B og C.

Først bruger vi arealformlen for vilkårlige trekanter til at finde siden c:

$$\text{solve}\left(17.3 = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot c \cdot \sin(60), c\right) \blacktriangleright \; c = 4.99408.$$

Altså er $c \approx 5$. Vi kender nu to sider og den mellemliggende vinkel; så vi kan nu bestemme de resterende mål ved at følge Opskrift 3.2.

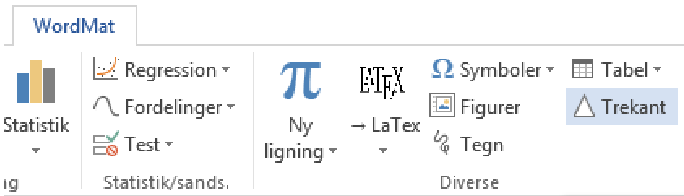
3.7 WordMats trekantløser

Problem

Du kender tre oplysninger om en trekant (fx to vinkler og en side), og du ønsker at finde de resterende oplysninger om trekanten.

Løsning

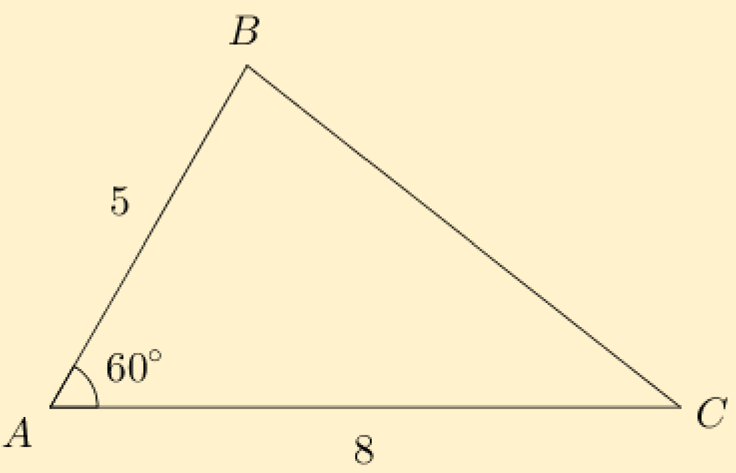
Brug *Trekantsløseren* i WordMat:



Se Eksempel 3.7.1.

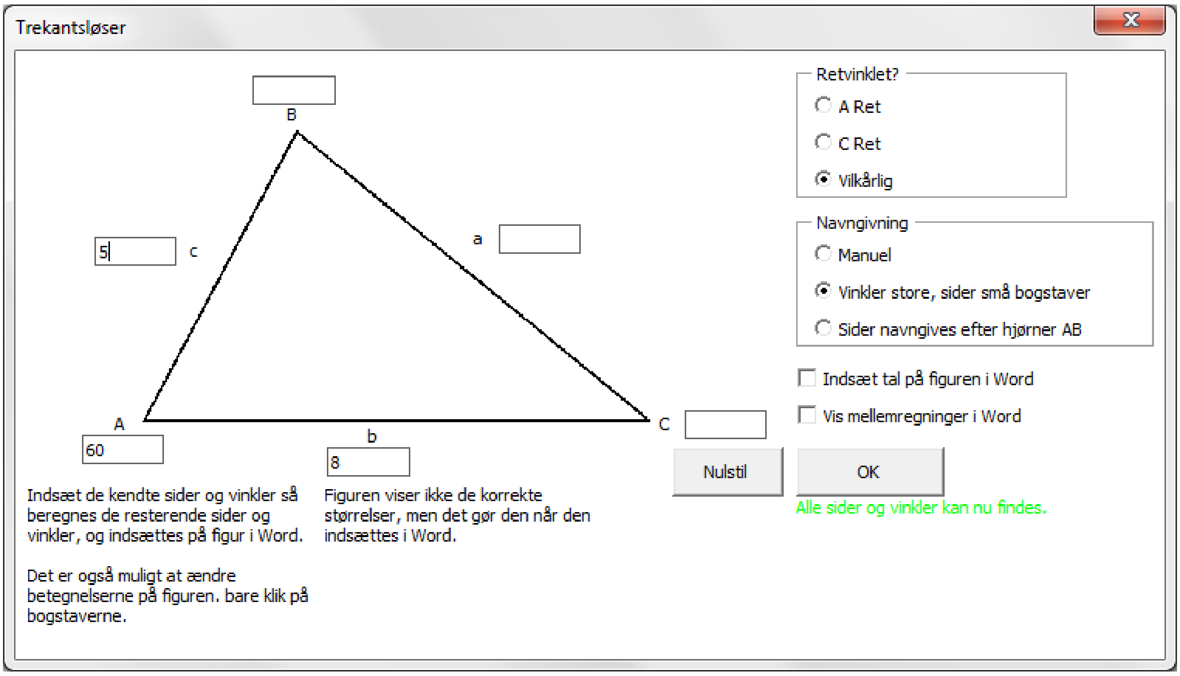
Eksempel 3.7.1: WordMats trekantløser

Figuren viser en trekant *ABC* hvor $b = 8$, $c = 5$ og $A = 60°$:

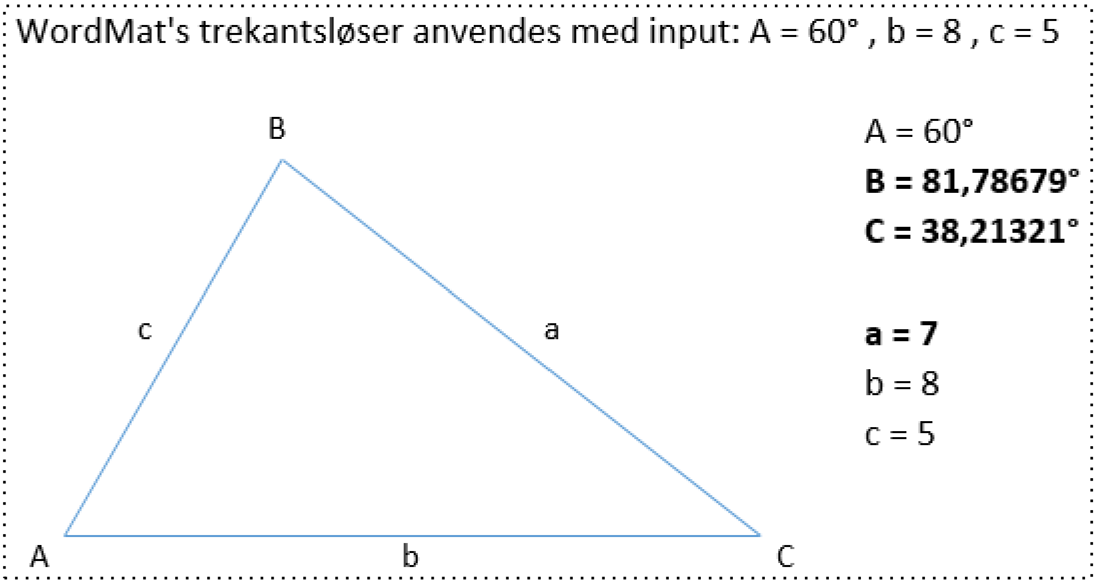


Bestem sidelængden a samt vinklerne B og C.

I Word klikker vi på fanen *WordMat* og vælger *Trekant* (se ovenfor). Dette åbner WordMats Trekantløser:



Vi indtaster de oplyste værdier og trykker *OK*:



Fra outputtet kan vi aflæse at $a = 7$, $B = 81{,}8°$ og $C = 38{,}2°$.

Tip: Installér WordMat *inden* prøven
WordMat kan downloades fra:

http://www.eduap.com/wordmat/?lang=da

(Må ikke downloades under en prøve, så gør det inden).

4. Vektorer (Nspire)

4.1 Definér vektor

Problem

Du ønsker at navngive en vektor således at du kan arbejde med den via dens navn.

Løsning

Skriv det ønskede navn efterfulgt af := (kolon+lighedstegn) efterfulgt af vektorens koordinater (omkranset med firkantklammer og adskilt af semikolon), og tryk så ENTER. Se Eksempel 4.1.1.

Eksempel 4.1.1: Definér vektorer og udfør udregninger
To vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er givet ved $$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$ Bestem $2\vec{a}$ og $\vec{a} + \vec{b}$.
Først defineres vektorerne (indtast som vist og tryk så på ENTER): $$\mathbf{a} := [2\,;3] \blacktriangleright \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$ $$\mathbf{b} := [-1\,;5] \blacktriangleright \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \end{bmatrix}$$ Herefter kan udregningerne udføres ved at indtaste udtrykkene: $$2 \cdot \mathbf{a} \blacktriangleright \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix}$$ $$\mathbf{a} + \mathbf{b} \blacktriangleright \begin{bmatrix} 1 \\ 8 \end{bmatrix}$$ Altså er $2\vec{a} = \binom{4}{6}$ og $\vec{a} + \vec{b} = \binom{1}{8}$.

4.2 Bestem længde af vektor

Problem

Du ønsker at bestemme længden af en vektor som du kender koordinaterne til.

Løsning

Brug funktionen **norm**. Se Eksempel 4.2.1.

Eksempel 4.2.1: Bestem længde af vektor
Bestem længden af vektoren $\vec{a} = \binom{5}{12}$.
Først defineres vektoren som vist i Opskrift 4.1: $$\mathbf{a} := [5\,;12] \blacktriangleright \begin{bmatrix} 5 \\ 12 \end{bmatrix}$$ Derefter findes vektorens længde ved hjælp af `norm`: $$\mathrm{norm}(\mathbf{a}) \blacktriangleright 13$$ Altså er $\lvert\vec{a}\rvert = 13$, dvs. vektorens længde er 13.

4.3 Bestem skalarprodukt mellem to vektorer

Problem

Du ønsker at bestemme skalarproduktet mellem to vektorer som du kender koordinaterne til.

Løsning

Brug funktionen **dotP**. Se Eksempel 4.3.1 og Eksempel 4.3.2.

Eksempel 4.3.1: Bestem skalarprodukt mellem to vektorer
To vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er givet ved $$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 8 \\ -5 \end{pmatrix}$$ Bestem skalarproduktet $\vec{a} \cdot \vec{b}$.
Først defineres vektorerne som vist i Opskrift 4.1: $$\mathbf{a} := [1\,;\,-2] \blacktriangleright \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b} := [8\,;\ -5] \ \blacktriangleright\ \begin{bmatrix} 8 \\ -5 \end{bmatrix}$$

Derefter udregnes skalarproduktet $\vec{a} \cdot \vec{b}$ ved hjælp af funktionen `dotP`:

$$\text{dotP}(\mathbf{a},\mathbf{b}) \ \blacktriangleright\ 18$$

Altså er skalarproduktet $\vec{a} \cdot \vec{b} = 18$.

Eksempel 4.3.2: Undersøg om to givne vektorer er ortogonale

To vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er givet ved

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \end{pmatrix}.$$

Er $\vec{a}$ og $\vec{b}$ ortogonale (altså står de vinkelret på hinanden)?

To vektorer er ortogonale netop hvis deres skalarprodukt giver 0 (se formel (53) i formelsamlingen). Spørgsmålet kan derfor besvares ved at udregne skalarproduktet mellem vektorerne. Først defineres vektorerne som vist i Opskrift 4.1:

$$\mathbf{a} := [2\,;\ 1] \ \blacktriangleright\ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b} := [3\,;\ -6] \ \blacktriangleright\ \begin{bmatrix} 3 \\ -6 \end{bmatrix}$$

Derefter udregnes skalarproduktet $\vec{a} \cdot \vec{b}$ ved hjælp af funktionen `dotP`:

$$\text{dotP}(\mathbf{a},\mathbf{b}) \ \blacktriangleright\ 0$$

Altså er skalarproduktet $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, så vektorerne er ortogonale.

4.4 Bestem vinkel mellem to vektorer

Problem

Du ønsker at bestemme vinklen mellem to vektorer som du kender koordinaterne til.

Løsning

Brug vinkelformlen

$$\cos(v) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

hvor $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er de to vektorer. Se Eksempel 4.4.1.

Eksempel 4.4.1: Bestem vinkel mellem to vektorer

Bestem vinklen mellem vektorerne $\vec{a} = \binom{2}{4}$ og $\vec{b} = \binom{3}{1}$.

Først defineres vektorerne som vist i Opskrift 4.1:

$$\mathbf{a} := [2\ ;\ 4] \blacktriangleright \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b} := [3\ ;\ 1] \blacktriangleright \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Herefter udregnes vinklen ved hjælp af vinkelformlen:

$$\arccos\left(\frac{\mathrm{dotP}(\mathbf{a}, \mathbf{b})}{\mathrm{norm}(\mathbf{a}) \cdot \mathrm{norm}(\mathbf{b})}\right) \blacktriangleright 45$$

(Funktionen $\cos^{-1}$ kan findes i kataloget, der ligger under . Alternativt kan man skrive `arccos`. Hvis du ønsker et decimaltal som resultat, så tryk CTRL+ENTER (CMD+ENTER på Mac) i stedet for blot ENTER).

Vinklen mellem vektorerne $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er altså 45°.

Husk at tjekke vinkelindstillingen når du udregner sinus- og cosinus-værdier. I bunden af Nspire-vinduet står der GRD hvis vinkelindstillingen er sat til grader; der står RAD hvis den er sat til radianer. Man kan ændre vinkelindstillingen ved at dobbeltklikke på teksten *Indstillinger* i bunden af vinduet og så vælge *Vinkel* → *Grad* eller *Vinkel* → *Radian*.

4.5 Bestem determinant for vektorpar

Problem

Du ønsker at bestemme determinanten for et vektorpar $(\vec{a},\vec{b})$.

Løsning

Brug funktionerne **`det`** og **`augment`**. Se Eksempel 4.5.1 og Eksempel 4.5.2.

Eksempel 4.5.1: Bestem determinant for vektorpar

To vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er givet ved

$$\vec{a} = \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}, \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}.$$

Bestem determinanten $\det(\vec{a},\vec{b})$.

Først defineres vektorerne som vist i Opskrift 4.1:

$$\mathbf{a} := [1\ ;\ 3] \ \blacktriangleright\ \begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b} := [2\ ;\ 5] \ \blacktriangleright\ \begin{bmatrix}2\\5\end{bmatrix}$$

Derefter udregnes determinanten $\det(\vec{a},\vec{b})$ på følgende vis:

$$\det(\text{augment}(\mathbf{a},\mathbf{b})) \ \blacktriangleright\ 11$$

Det ses at determinanten er $\det(\vec{a},\vec{b}) = 11$.

Eksempel 4.5.2: Undersøg om to givne vektorer er parallelle

Undersøg om vektorerne $\vec{a} = \binom{2}{1}$ og $\vec{b} = \binom{1}{0{,}5}$ er parallelle.

To vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er parallelle netop hvis determinanten $\det(\vec{a},\vec{b})$ giver 0. Så spørgsmålet kan besvares ved at udregne determinanten (Eksempel 4.5.1):

$$\mathbf{a} := [2\ ;\ 1] \ \blacktriangleright\ \begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b} := [1\ ;\ 0.5] \ \blacktriangleright\ \begin{bmatrix}1\\0.5\end{bmatrix}$$

$$\det(\text{augment}(\mathbf{a},\mathbf{b})) \ \blacktriangleright\ 0$$

Det ses at $\det(\vec{a},\vec{b}) = 0$, så vektorerne *er* parallelle.

4.6 Bestem projektion af en vektor på en anden

Problem

Du ønsker at bestemme projektionen af en vektor på en anden vektor.

Løsning

Brug projektionsformlen

$$\vec{a}_b = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \cdot \vec{b}$$

der giver projektionen af $\vec{a}$ på $\vec{b}$. (Hvis du i stedet skal bestemme projektionen af $\vec{b}$ på $\vec{a}$, så skal du bytte om på $\vec{a}$ og $\vec{b}$ i formlen). Se eksemplerne nedenfor.

Eksempel 4.6.1: Bestem projektionen af en vektor på en anden

To vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er givet ved

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Bestem projektionen af $\vec{a}$ på $\vec{b}$.

Først defineres vektorerne (Opskrift 4.1):

$$\mathbf{a} := [-4\,;\ 3] \blacktriangleright \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b} := [1\,;\ -2] \blacktriangleright \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Herefter bestemmes projektionen ved hjælp af projektionsformlen:

$$\mathbf{p} := \frac{\mathrm{dotP}(\mathbf{a}, \mathbf{b})}{(\mathrm{norm}(\mathbf{b}))^2} \cdot \mathbf{b} \blacktriangleright \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Projektionen af $\vec{a}$ på $\vec{b}$ er altså $\vec{a}_b = \binom{-2}{4}$.

Eksempel 4.6.2: Bestem projektionen af en vektor på en anden

To vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er givet ved

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Bestem projektionen af $\vec{b}$ på $\vec{a}$.

Først defineres vektorerne (Opskrift 4.1):

$$\mathbf{a} := [1\ ;\ 2] \blacktriangleright \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b} := [-2\ ;\ 6] \blacktriangleright \begin{bmatrix} -2 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Herefter bestemmes projektionen ved hjælp af projektionsformlen ovenfor (hvor $\vec{a}$ og $\vec{b}$ byttes om fordi der spørges til projektionen af $\vec{b}$ på $\vec{a}$):

$$\mathbf{p} := \frac{\mathrm{dotP}(\mathbf{b}, \mathbf{a})}{(\mathrm{norm}(\mathbf{a}))^2} \cdot \mathbf{a} \blacktriangleright \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Bestem projektionen af $\vec{b}$ på $\vec{a}$ er altså $\vec{b}_a = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$.

5. Differentialregning (Nspire)

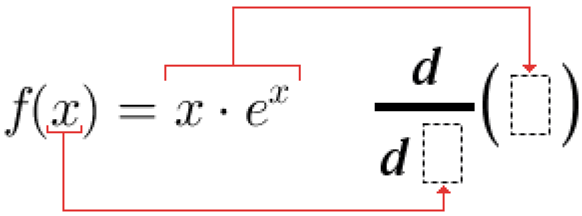
5.1 Differentiér funktion

Problem

Du kender forskriften for en funktion $f(x)$ og ønsker at bestemme $f'(x)$.

Løsning

Klik på , dobbeltklik på matematikskabelonen og indtast så funktionsforskriften samt navnet på den uafhængige variabel.



Eksempel 5.1.1: Bestem $f'(x)$

En funktion f er givet ved

$$f(x) = x \cdot e^x.$$

Bestem $f'(x)$.

Den afledte funktion $f'(x)$ bestemmes ved hjælp af matematikskabelonen :

$$\frac{d}{dx}(x \cdot \mathbf{e}^x) \blacktriangleright (x+1) \cdot \mathbf{e}^x$$

Altså er $f'(x) = (x+1) \cdot e^x$.

Hvis man ønsker at arbejde videre med den afledte funktion $f'(x)$, så er det en fordel at gemme dens forskrift ligesom i Opskrift 1.1. Dette er demonstreret i Eksempel 5.1.2.

Eksempel 5.1.2: Bestem $f'(x)$ og gem forskrift til efterfølgende brug

En funktion f er givet ved

$$f(t) = \frac{1}{t^2+1}.$$

Bestem tallene $f'(1)$, $f'(2)$ og $f'(3)$.

Den afledte funktion $f'(t)$ bestemmes og gemmes under navnet `df(t)`:

$$\mathbf{df}(t) := \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{t^2+1}\right) \blacktriangleright \mathit{Udført}$$

Man kan se forskriften for $f'(t)$ ved at indtaste `df(t)`:

$$\mathbf{df}(t) \blacktriangleright \frac{-2\cdot t}{(t^2+1)^2}$$

Altså er

$$f'(t) = \frac{-2\cdot t}{(t^2+1)^2}.$$

Man kan nu udregne tallene $f'(1)$, $f'(2)$ og $f'(3)$ ved at indtaste som vist:

$$\mathbf{df}(1) \blacktriangleright \frac{-1}{2}$$

$$\mathbf{df}(2) \blacktriangleright \frac{-4}{25}$$

$$\mathbf{df}(3) \blacktriangleright \frac{-3}{50}$$

Altså er $f'(1) = -\frac{1}{2}$ og $f'(2) = -\frac{4}{25}$ og $f'(3) = -\frac{3}{50}$.

Hvis f allerede er defineret (jf. Opskrift 1.1), så behøver man ikke at indtaste dens forskrift igen når man vil bestemme den afledte funktion $f'(x)$. Dette er demonstreret i Eksempel 5.1.3.

Eksempel 5.1.3: Bestem $f'(x)$ når $f(x)$ allerede er defineret

En funktion f er givet ved

$$f(x) = x \cdot e^x.$$

Bestem $f(0)$ samt $f'(0)$.

Først defineres funktionen som vist i Opskrift 1.1:

$$\mathbf{f}(x) := x \cdot \mathbf{e}^x \;\blacktriangleright\; Udført$$

Nu hvor funktionen er defineret, kan man udregne $f(0)$ således:

$$\mathbf{f}(0) \;\blacktriangleright\; 0$$

Altså er $f(0) = 0$.

Nu bestemmes den afledte $f'(x)$, og denne gemmes under navnet `df(x)`:

$$\mathbf{df}(x) := \frac{d}{dx}\left(\mathbf{f}(x)\right) \;\blacktriangleright\; Udført$$

Ved at indtaste `df(x)` kan man inspicere forskriften for $f'(x)$:

$$\mathbf{df}(x) \;\blacktriangleright\; (x+1) \cdot \mathbf{e}^x$$

Man kan nu udregne $f'(0)$ således:

$$\mathbf{df}(0) \;\blacktriangleright\; 1$$

Altså er $f'(0) = 1$.

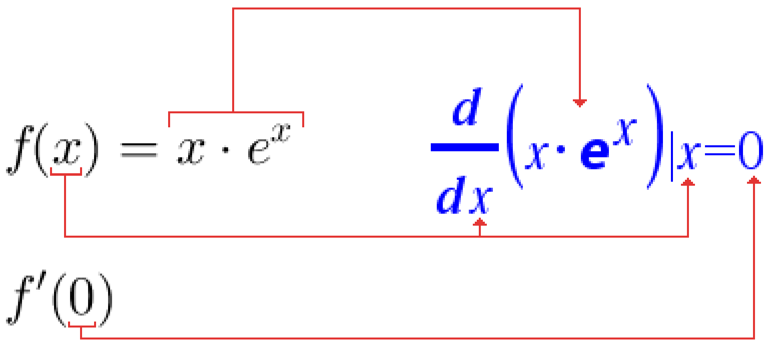
5.2 Bestem funktionsværdi for afledt funktion, eksempelvis f'(0)

Problem

Du kender forskriften for en funktion $f(x)$ og ønsker at bestemme f.eks. $f'(0)$.

Løsning

Klik på , dobbeltklik på matematikskabelonen og indtast så funktionsforskriften samt navnet på den uafhængige variabel. Brug derefter en lodret streg til at angive hvilken funktionsværdi du vil udregne:



Eksempel 5.2.1: Bestem funktionsværdi for afledt funktion

En funktion f er givet ved

$$f(x) = x \cdot e^x.$$

Bestem $f'(0)$.

For at udregne $f'(0)$ ser det således ud:

$$\frac{d}{dx}(x \cdot \mathbf{e}^x)|x = 0 \;\blacktriangleright\; 1$$

Altså er $f'(0) = 1$.

Se også Eksempel 5.1.2 om at bestemme og gemme $f'(x)$ til senere brug.

Tip: Symbolet "lodret streg"
Symbolet "lodret streg" kan på Mac indsættes ved at trykke `Alt+I`; på Windows kan det indsættes ved at trykke `AltGr+`*(knappen til venstre for backspace)*. Alternativt kan symbolet findes ved at klikke på og vælge *Tegn*.

5.3 Bestem tangentligning

Problem

Du kender forskriften for en funktion f og ønsker at bestemme en ligning for tangenten til grafen for f i et bestemt punkt.

Løsning

Brug kommandoen **`tangentLine`** som vist i Eksempel 5.3.1.

Eksempel 5.3.1: Bestem tangentligning

En funktion f er givet ved

$$f(x) = -x^4 + 5x^3 - 7x^2 + x + 1.$$

Bestem en ligning for tangenten til grafen for f i punktet $P(1, f(1))$.

Tangentligningen bestemmes ved hjælp af kommandoen `tangentLine`:

$$\mathrm{tangentLine}(-x^4+5\cdot x^3-7\cdot x^2+x+1,\ x=1) \ \blacktriangleright\ 1-2\cdot x$$

Altså er $y = 1 - 2x$ en ligning for tangenten til grafen for f i punktet $P(1, f(1))$.

Hvis f allerede er defineret (jf. Opskrift 1.1), så behøver man ikke at indtaste dens forskrift igen når man vil bestemme en tangentligning.

Eksempel 5.3.2: Bestem tangentligning for en defineret funktion

En funktion f er givet ved

$$f(t) = t^2 + 1.$$

Bestem $f(3)$, og bestem en ligning for tangenten til grafen for f i $P(-3, f(-3))$.

Først defineres funktionen som beskrevet i Opskrift 1.1:

$$\mathbf{f}(t):=t^2+1 \ \blacktriangleright\ \mathit{Udført}$$

Funktionsværdien $f(3)$ kan nu udregnes således:

$$\mathbf{f}(3) \ \blacktriangleright\ 10$$

Man kan bruge `tangentLine` til at bestemme en ligning for tangenten til grafen for f i punktet $P(-3, f(-3))$:

$$\mathrm{tangentLine}(\mathbf{f}(x),\ x=-3) \ \blacktriangleright\ -6\cdot x-8$$

Altså er $y = -6x - 8$ en ligning for tangenten til grafen for f i $P(-3, f(-3))$.

5.4 Bestem monotoniforhold

Problem

Du ønsker at bestemme monotoniforhold for en funktion f som du kender en forskrift for.

Løsning

Definér funktionen, differentiér den, og løs så ligningen $f'(x) = 0$ for at finde de steder hvor grafen har vandret tangent. Indsæt så tal i forskriften for f' som er mindre/større end løsningerne til ligningen $f'(x) = 0$ for at finde ud af hvor f er voksende/aftagende.

Eksempel 5.4.1: Bestem monotoniforhold
En funktion f er givet ved $$f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 15x + 1.$$ Bestem monotoniforholdene for f.
Først definerer vi funktionen som vist i Opskrift 1.1: $$f(x) := \frac{1}{3} \cdot x^3 + x^2 - 15 \cdot x + 1 \;\blacktriangleright\; \mathit{Udført}$$ Herefter bruger vi matematikskabelonen $\frac{d}{d\square}\square$ til at bestemme den afledte funktion $f'(x)$, som vi gemmer under navnet `df(x)`: $$\mathbf{df}(x) := \frac{d}{dx}\left(\mathbf{f}(x)\right) \;\blacktriangleright\; \mathit{Udført}$$ Vi løser nu ligningen $f'(x) = 0$ for at finde de steder hvor grafen for f har vandret tangent (som er de eneste steder hvor monotoniforholdene kan skifte). Dette klares ved hjælp af `solve`: $$\mathrm{solve}(\mathbf{df}(x)=0,\ x) \;\blacktriangleright\; x=-5 \text{ or } x=3$$ Heraf fremgår at ligningen $f'(x) = 0$ har to løsninger: nemlig -5 og 3. Sidste trin er at finde ud af hvor f er voksende/aftagende ved at indsætte tal i forskriften for f' som er mindre/større end hver af de fundne løsninger. Vi vælger her at bruge tallene -6, 0 og 4: $$\mathbf{df}(-6) \;\blacktriangleright\; 9$$ $$\mathbf{df}(0) \;\blacktriangleright\; -15$$

$$\text{df}(4) \blacktriangleright 9$$

Det ses at $f'(-6)$ er positiv, $f'(0)$ er negativ og $f'(4)$ er positiv. Da f' kun kan skifte fortegn ved $x = -5$ og ved $x = 3$, kan man nu konkludere at:

- f er voksende på intervallet $]-\infty; -5]$
- f er aftagende på intervallet $[-5; 3]$
- f er voksende på intervallet $[3; \infty[$

Tip: Tegn grafen!
Man kan nemt komme til at lave fejl når man bestemmer monotoniforhold. En god måde at få større tiltro til sit svar er at tegne grafen for funktionen (Opskrift 1.3). Se efter om funktionen faktisk ser ud til at være voksende/aftagende der hvor dit svar siger den bør være det.

5.5 Bestem maksimum eller minimum (grafisk)

Problem

Du kender forskriften for en funktion f og ønsker at bruge en grafisk tilgang til at finde ud af hvor (eller om) den antager sin største eller mindste værdi.

Løsning

Der hvor en funktion har maksimum eller minimum, har funktionens graf vandret tangent (såfremt funktionen er pæn). Start derfor med at finde de steder hvor grafen har vandret tangent: Dette kan gøres ved at løse ligningen $f'(x) = 0$, hvilket kan klares ved at bruge `solve` og matematikskabelonen $\frac{d}{d\square}\square$.
Tegn derefter grafen for funktionen og brug menupunktet

Undersøg grafer → Maksimum eller *Undersøg grafer → Minimum*

på hver af de steder hvor funktionen har vandret tangent. Se Eksempel 5.5.1 samt Eksempel 5.5.2.

Eksempel 5.5.1: Bestem maksimum (grafisk)

En funktion f er givet ved

$$f(x) = x \cdot e^{-x}.$$

Bestem maksimum for f.

Først definerer vi funktionen som vist i Opskrift 1.1:

$$\mathbf{f}(x) := x \cdot \mathbf{e}^{-x} \ \blacktriangleright \ Udført$$

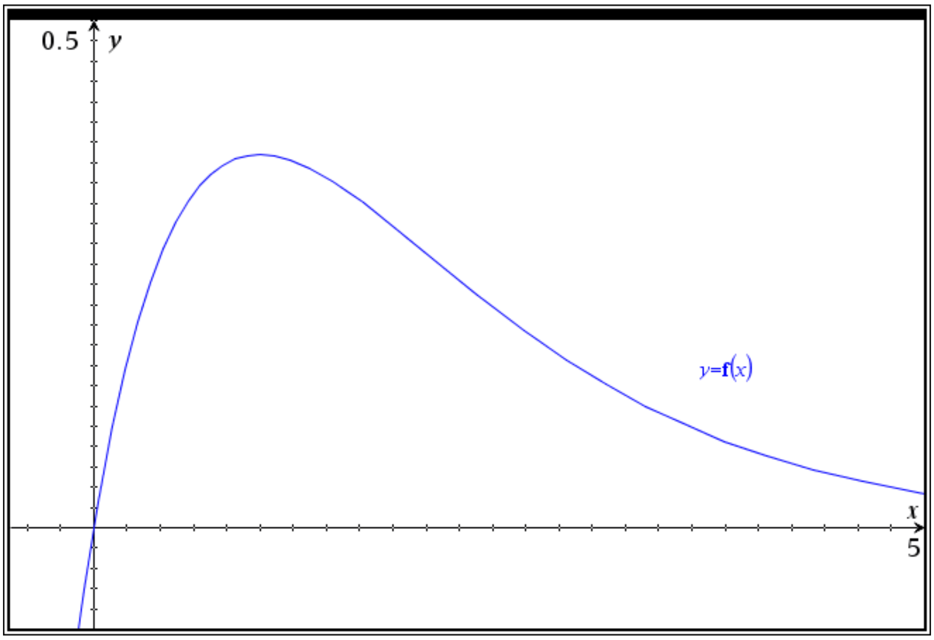
Herefter bruger vi matematikskabelonen $\frac{d}{d\square}\square$ til at bestemme den afledte funktion $f'(x)$, som vi gemmer under navnet `df(x)`:

$$\mathbf{df}(x) := \frac{d}{dx}\left(\mathbf{f}(x)\right) \ \blacktriangleright \ Udført$$

Vi løser nu ligningen $f'(x) = 0$ for at finde de steder hvor grafen for f har vandret tangent (som er de eneste steder hvor der kan være et maksimum).

$$\mathrm{solve}(\mathbf{df}(x)=0,\ x) \ \blacktriangleright \ x=1$$

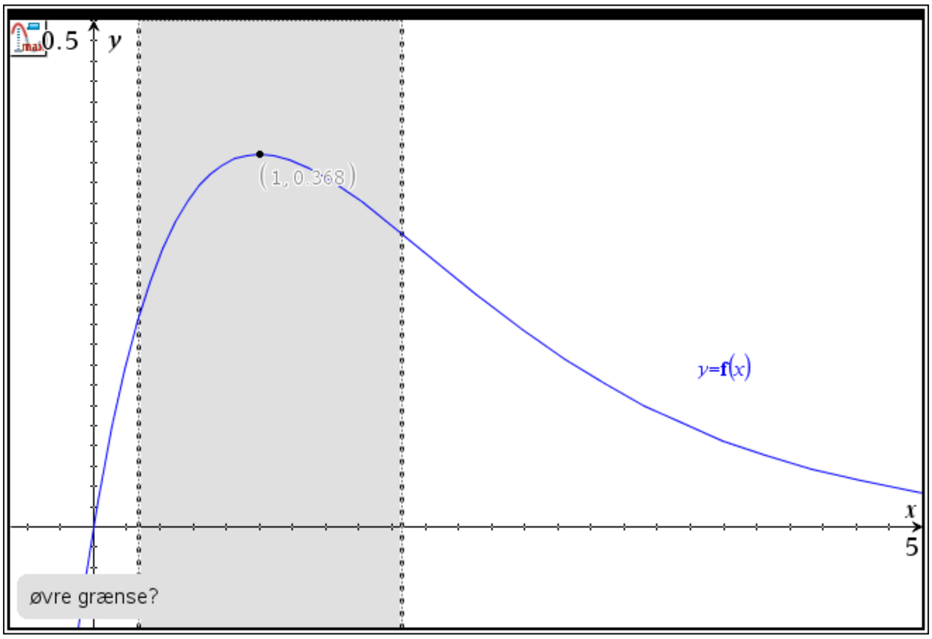
Heraf fremgår det at grafen har vandret tangent ved $x = 1$. Såfremt funktionen har et maksimum, bliver den nødt til at antage det her! Næste trin er at tegne grafen som vist i Opskrift 1.3:



Det ser ganske rigtigt ud til at funktionen antager sit maksimum ved $x = 1$. For at finde koordinatsættet til maksimumspunktet klikker vi på  og vælger

Undersøg grafer → Maksimum

Værktøjet beder først om nedre grænse og derefter om øvre grænse. Vi vælger disse så de ligger hhv. til venstre/højre for $x = 1$. Herefter finder programmet den største funktionsværdi inden for de angivne grænser:



Fra skærmbilledet fremgår det at grafens maksimumspunkt har koordinatsættet $(1;\ 0{,}368)$. Eftersom ligningen $f'(x) = 0$ kun har løsningen $x = 1$, kan der ikke være et maksimum uden for grafvinduets grænser som vi har overset. Så vi kan nu konkludere: Funktionen antager sit maksimum ved $x = 1$, og den største værdi som funktionen antager er $f(1) \approx 0{,}368$.

Eksempel 5.5.2 viser hvordan man kan finde minimum for en funktion.

Eksempel 5.5.2: Bestem minimum (grafisk)

En funktion f er givet ved

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} + e^{x}.$$

Bestem minimum for f.

Først definerer vi funktionen som vist i Opskrift 1.1:

$$\mathbf{f}(x) := \frac{1}{\sqrt{x}} + \mathbf{e}^{-x} \blacktriangleright \ \mathit{Udført}$$

Herefter bruger vi matematikskabelonen $\frac{d}{d\square}\square$ til at bestemme den afledte funktion $f'(x)$, som vi gemmer under navnet `df(x)`:

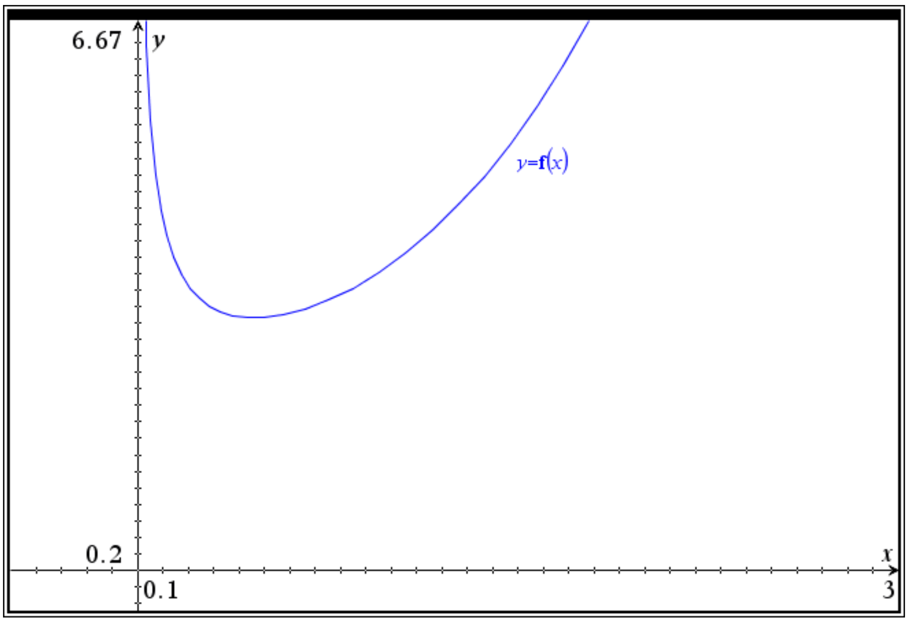
$$\mathbf{df}(x) := \frac{d}{dx}\left(\mathbf{f}(x)\right) \blacktriangleright \ \mathit{Udført}$$

Vi løser nu ligningen $f'(x) = 0$ for at finde de steder hvor grafen for f har vandret tangent (som er de eneste steder hvor funktionen kan have et minimum). Dette klares ved hjælp af kommandoen `solve`:

$$\text{solve}(\mathbf{df}(x)=0,\ x) \blacktriangleright \ x=0.462739 \ ⚠$$

(Nspire advarer her om at `solve` måske ikke har fundet alle løsninger; dette er faktisk en falsk alarm).

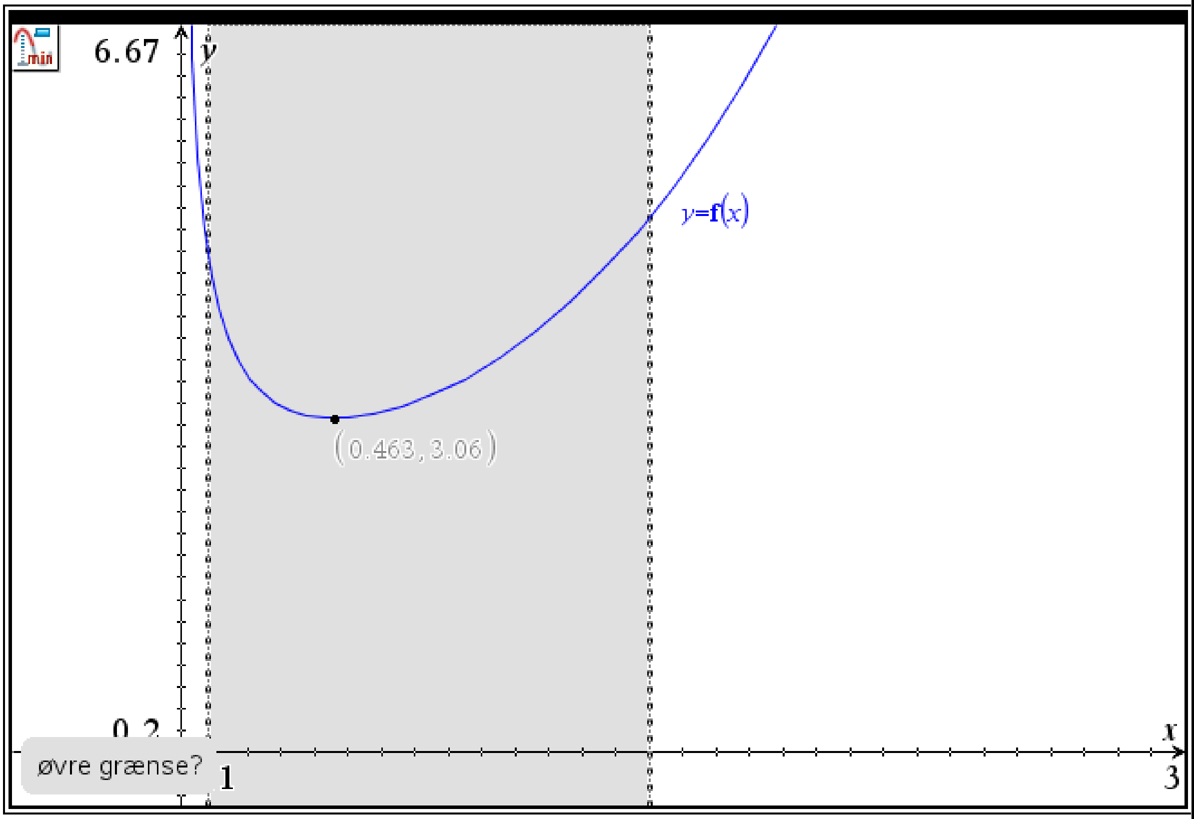
Grafen for funktionen har altså vandret tangent ved $x = 0{,}463$. Såfremt funktionen har et minimum, bliver den nødt til at antage det her! Næste trin er at tegne grafen som vist i Opskrift 1.3:



Det ser ganske rigtigt ud til at funktionen antager sit minimum ved $x = 0{,}463$. Vi bestemmer nu koordinatsættet til grafens minimumspunkt ved at klikke på 🛠 og vælge

Undersøg grafer → Minimum

Værktøjet beder først om nedre grænse og derefter om øvre grænse. Vi vælger disse så de ligger hhv. til venstre/højre for $x = 0{,}463$. Herefter finder programmet den mindste funktionsværdi inden for de angivne grænser:



Fra skærmbilledet fremgår det at grafens minimumspunkt har koordinatsættet $(0{,}463;\ 3{,}06)$. Eftersom ligningen $f'(x) = 0$ kun har løsningen $x = 0{,}463$, kan der ikke være et minimum uden for grafvinduets grænser som vi har overset. Så vi kan nu konkludere: Funktionen antager sit minimum ved $x = 0{,}463$, og den mindste værdi som funktionen antager er $f(0{,}463) \approx 3{,}06$.

Hvis grafen har vandret tangent flere steder, så skal man undersøge hver af stederne for at se i hvilket af dem den antager den største/mindste værdi (det kan også forekomme i et intervalendepunkt)!

5.6 Bestem maksimum eller minimum (symbolsk)

Problem

Du kender forskriften for en funktion f og ønsker at bruge en symbolsk tilgang til at finde ud af hvor (eller om) den antager sin største eller mindste værdi.

Løsning

Brug kommandoen **`fMax`** eller kommandoen **`fMin`**. De har formen

fMax(*FUNKTION*, *UVAR*) fMin(*FUNKTION*, *UVAR*)

hvor *UVAR* står for navnet på den uafhængige variabel.

Eksempel 5.6.1: Bestem maksimum (symbolsk)

En funktion f er givet ved

$$f(x) = x \cdot e^{-x}.$$

Bestem maksimum for f.

1. Definér funktionen (Opskrift 1.1):

$$\mathrm{f}(x) := x \cdot \mathrm{e}^{-x} \quad \blacktriangleright \quad \textit{Udført}$$

2. Brug derefter kommandoen `fMax` til at bestemme x-koordinaten til funktionens maksimumspunkt:

$$\mathrm{fMax}(\mathrm{f}(x), x) \quad \blacktriangleright \quad x = 1$$

3. Bestem den tilhørende y-værdi (funktionens største værdi) ved at indsætte det fundne x-koordinat i funktionen:

$$\mathrm{f}(1) \quad \blacktriangleright \quad \mathrm{e}^{-1}$$

Som sædvanligt: Hvis man i stedet vil have svaret som decimaltal, så kan man trykke CTRL+ENTER (Windows) eller CMD+ENTER (Mac):

$$\mathrm{f}(1) \quad \blacktriangleright \quad 0.367879$$

4. Konklusion: Funktionen f antager sit maksimum ved $x = 1$. Den største værdi som f kan antage er $e^{-1} \approx 0{,}367879$.

Eksempel 5.6.2: Bestem minimum (symbolsk)

En funktion f er givet ved

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} + e^x.$$

Bestem minimum for f.

1. Definér funktionen (Opskrift 1.1):

$$\mathbf{f}(x) := \frac{1}{\sqrt{x}} + \mathbf{e}^x \;\blacktriangleright\; \mathit{Udført}$$

2. Brug derefter kommandoen `fMin` til at bestemme x-koordinaten til funktionens minimumspunkt:

$$\mathrm{fMin}(\mathbf{f}(x),\ x) \;\blacktriangleright\; x{=}0.462739$$

3. Bestem den tilhørende y-værdi (funktionens mindste værdi) ved at indsætte det fundne x-koordinat i funktionen:

$$\mathrm{f}(0.462739) \;\blacktriangleright\; 3.05847$$

4. Konklusion: Funktionen f antager sit minimum ved $x = 0{,}462739$. Den mindste værdi som f kan antage er 3,05847.

6. Integralregning (Nspire)

6.1 Udregn bestemt integral

Problem

Du ønsker at udregne et bestemt integral $\int_a^b f(x)\,dx$.

Løsning

Klik på , dobbeltklik på matematikskabelonen og indtast så funktionsforskriften, integrationsgrænserne og navnet på den uafhængige variabel.

Eksempel 6.1.1: Udregn bestemt integral

Bestem integralet $\int_1^3 (10x^4 - 2x^3 + 1)\,dx$.

Integralet udregnes ved hjælp af skabelonen (der ligger under):

$$\int_1^3 (10 \cdot x^4 - 2 \cdot x^3 + 1)\,\mathrm{d}x \blacktriangleright 446$$

Altså er $\int_1^3 (10x^4 - 2x^3 + 1)\,dx = 446$.

Hvis f allerede er defineret (jf. Opskrift 1.1), så behøver man ikke at indtaste dens forskrift igen når man vil integrere den. Dette er demonstreret i Eksempel 6.1.2.

Eksempel 6.1.2: Udregn bestemt integral for defineret funktion

En funktion f er givet ved

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 1.$$

Bestem $f(1)$, og bestem $\int_{-5}^{5} f(x)\,dx$.

Først defineres funktionen som vist i Opskrift 1.1:

$$\mathbf{f}(x) := \frac{1}{2} \cdot x^2 + 1 \blacktriangleright \mathit{Udført}$$

Nu hvor funktionen er defineret, kan man indtaste $f(1)$ for at udregne denne funktionsværdi:

$$\mathbf{f}(1) \blacktriangleright \frac{3}{2}$$

Altså er $f(1) = \frac{3}{2}$.

Integralet udregnes ved hjælp af skabelonen $\int_{\square}^{\square} \square \, d\square$ (der ligger under 📖):

$$\int_{-5}^{5} \mathbf{f}(x)\,dx \blacktriangleright \frac{155}{3}$$

Altså er $\int_{-5}^{5} f(x)\,dx = \frac{155}{3}$.

6.2 Bestem stamfunktion

Problem

Du kender en funktion f og ønsker at bestemme en stamfunktion F.

Løsning

Klik på 📖, dobbeltklik på matematikskabelonen $\int \square d\square$ og indtast så funktionsforskriften samt navnet på den uafhængige variabel.

Eksempel 6.2.1: Bestem stamfunktion

En funktion f er givet ved

$$f(x) = x \cdot e^x.$$

Bestem en stamfunktion til f.

Klik på 📖, vælg matematikskabelonen $\int \square d\square$, og indtast så funktionsforskriften og navnet på den uafhængige variabel:

$$\int (x \cdot \mathbf{e}^x)\,\mathrm{d}x \;\blacktriangleright\; (x-1) \cdot \mathbf{e}^x$$

Altså er $F(x) = (x-1) \cdot e^x$ en stamfunktion til f.

Hvis f allerede er defineret (jf. Opskrift 1.1), så behøver man ikke at indtaste dens forskrift igen når man vil integrere den.

Eksempel 6.2.2: Bestem stamfunktion for defineret funktion

En funktion f er givet ved

$$f(t) = e^t \cdot (t+1).$$

Bestem $f(-1)$, og bestem en stamfunktion til f.

Først defineres funktionen som vist i Opskrift 1.1:

$$\mathbf{f}(t) := \mathbf{e}^t \cdot (t+1) \;\blacktriangleright\; \mathit{Udført}$$

Herefter kan man indtaste $f(-1)$ for at udregne denne funktionsværdi:

$$\mathbf{f}(-1) \;\blacktriangleright\; 0$$

Matematikskabelonen $\int \square d\square$ kan bruges til at bestemme en stamfunktion til f:

$$\int \mathbf{f}(t)\,\mathrm{d}t \;\blacktriangleright\; t \cdot \mathbf{e}^t$$

Altså er $F(t) = t \cdot e^t$ en stamfunktion til f.

6.3 Bestem forskrift for specifik stamfunktion

Problem

Du kender forskriften for en funktion f og ønsker at bestemme en forskrift for den stamfunktion til f hvis graf går igennem et bestemt punkt $P(x_0, y_0)$.

Løsning

Brug kommandoen **`deSolve`** til at løse begyndelsesværdiproblemet

$$y' = f(x), \quad y(x_0) = y_0.$$

Eksempel 6.3.1: Bestem forskrift for specifik stamfunktion

En funktion f er givet ved

$$f(x) = 12x^3 - 1.$$

Bestem en forskrift for den stamfunktion til f, hvis graf går igennem punktet $P(1, 5)$.

Den søgte forskrift bestemmes ved hjælp af kommandoen `deSolve`:

$$\text{deSolve}(y' = 12 \cdot x^3 - 1 \text{ and } y(1) = 5, x, y) \blacktriangleright y = 3 \cdot x^4 - x + 3$$

Vi omdøber y til F og konkluderer at

$$F(x) = 3x^4 - x + 3$$

er en forskrift for den stamfunktion til f, hvis graf går igennem punktet $P(1, 5)$.

6.4 Bestem areal af punktmængde (grafisk)

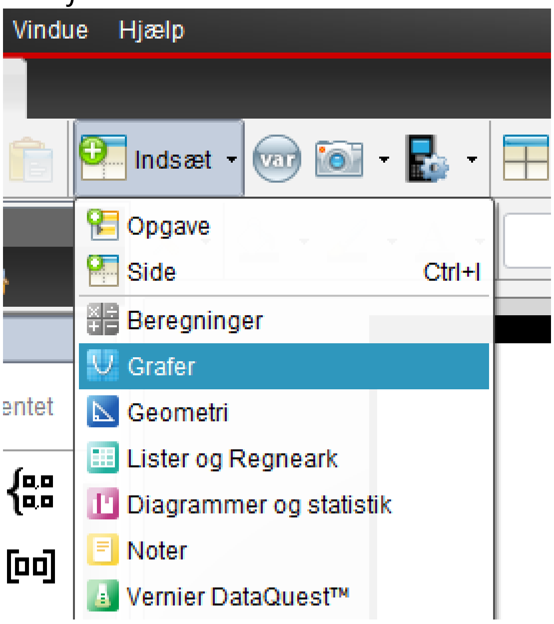
Problem

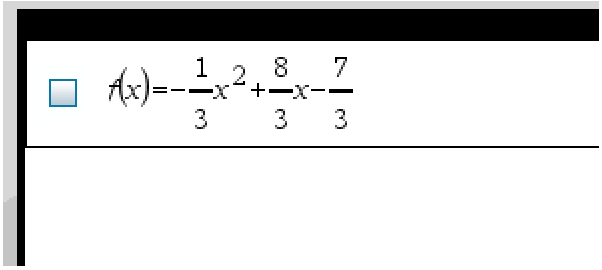
Du ønsker at bruge en grafisk tilgang til at bestemme arealet af en punktmængde der er afgrænset af en eller flere funktionsgrafer (og evt. koordinatakser).

Løsning

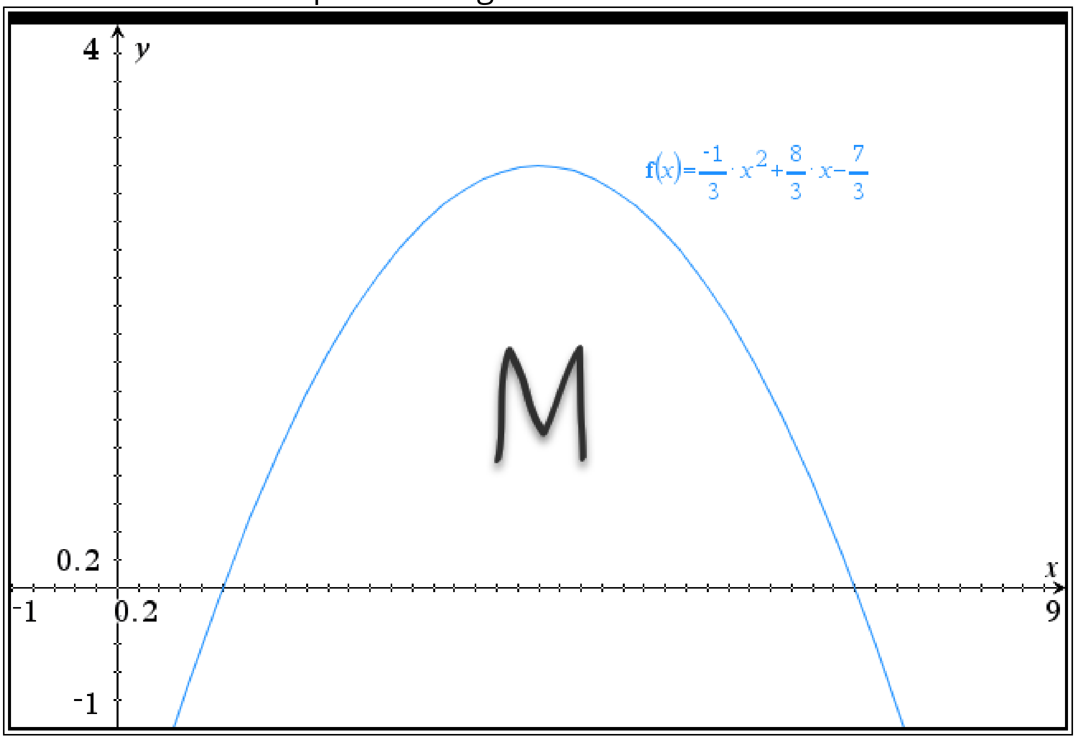
Brug applikationen *Grafer* til at tegne punktmængden. Klik derefter på 🛠 og vælg enten

Undersøg grafer → Integral eller *Undersøg grafer → Areal af område.*

Eksempel 6.4.1: Punktmængde afgrænset af graf og koordinatakse
En funktion f er givet ved $$f(x) = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{8}{3}x - \frac{7}{3}.$$ Grafen for f afgrænser sammen med førsteaksen en punktmængde M i første kvadrant. Bestem arealet af M.
1. Tilføj applikationen *Grafer*:  2. Indtast funktionsforskriften og tryk ENTER:



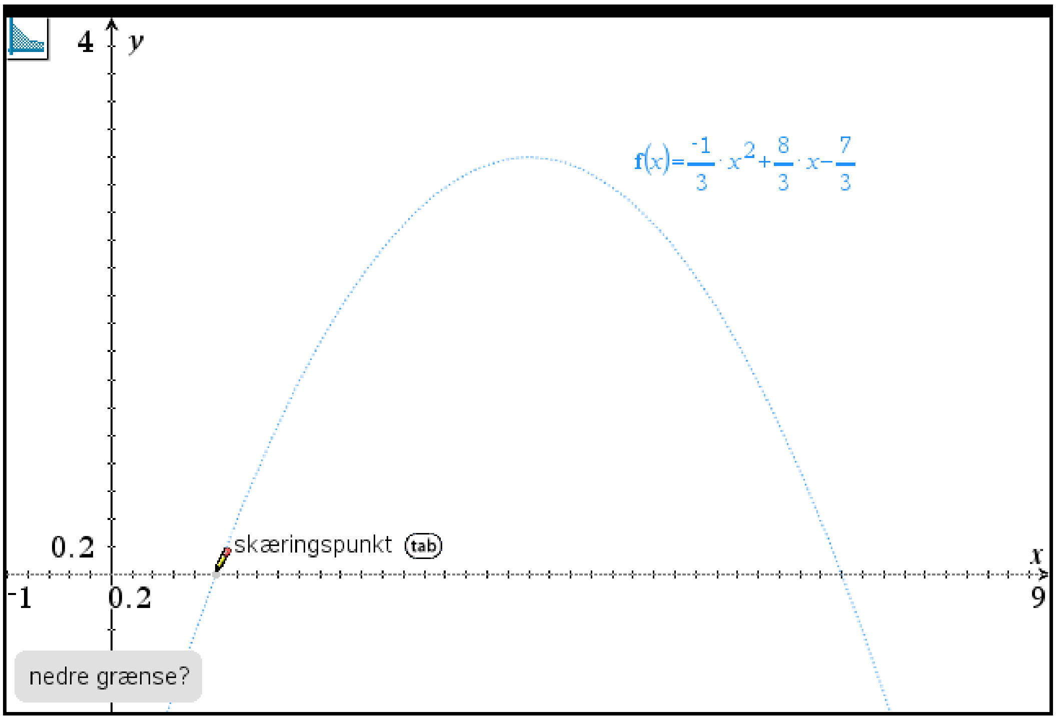
Dette får programmet til at tegne grafen for funktionen, hvilket gør det muligt for os at se den omtalte punktmængde:



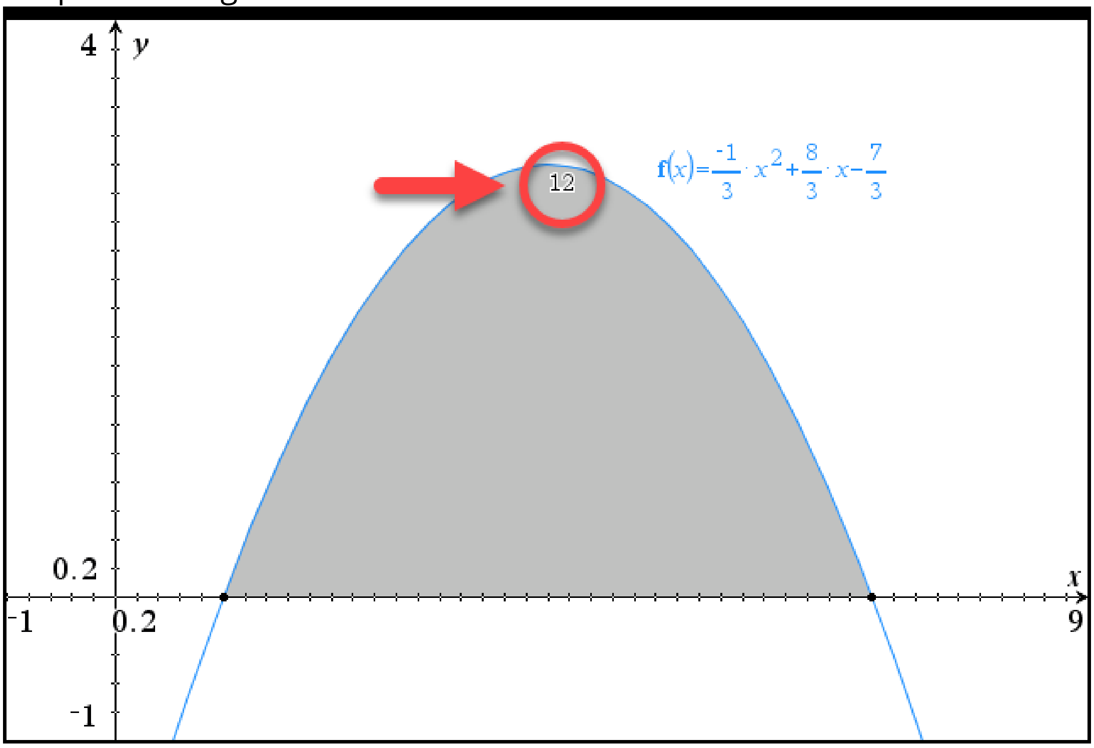
3. Klik på , vælg

Undersøg grafer → Integral

og klik først på det venstre skæringspunkt med x-aksen og derefter på det højre skæringspunkt med x-aksen:



4. Programmet bestemmer så arealet af punktmængden og viser resultatet oven i punktmængden:



5. Fra skærmbilledet kan vi aflæse at arealet af M er 12.

Tip: Akser og kvadranter
Koordinatsystemets vandrette akse ("x-aksen") kaldes også for **førsteaksen**. Den lodrette akse ("y-aksen") kaldes også for **andenaksen**. Disse to akser inddeler koordinatsystemet i fire områder, der kaldes for **kvadranter**:

2. kvadrant	1. kvadrant
3. kvadrant	4. kvadrant

Eksempel 6.4.2 nedenfor viser hvordan man kan bestemme arealet af en punktmængde der er afgrænset af to grafer.

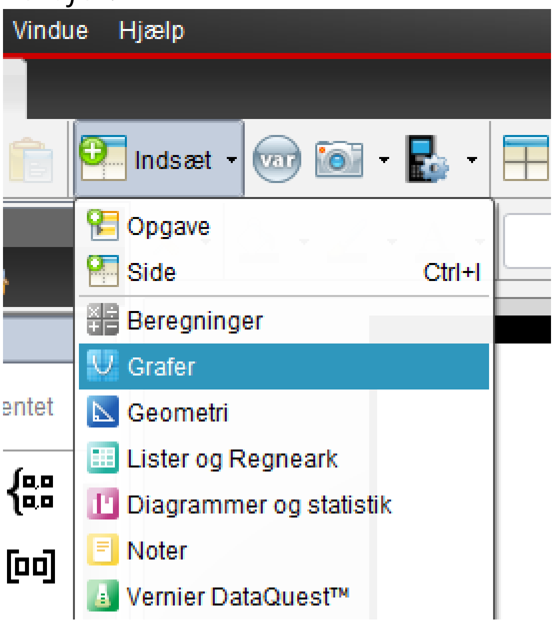
Eksempel 6.4.2: Bestem areal af punktmængde afgrænset af to grafer

To funktioner f og g er givet ved

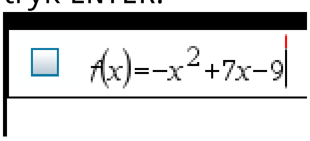
$$f(x) = -x^2 + 7x - 9$$
$$g(x) = \frac{1}{2}x$$

Graferne for f og g afgrænser i første kvadrant en punktmængde M. Bestem arealet af M.

1. Tilføj applikationen *Grafer*:



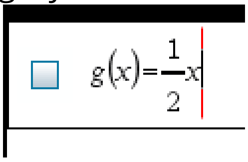
2. Indtast forskriften for f og tryk ENTER:



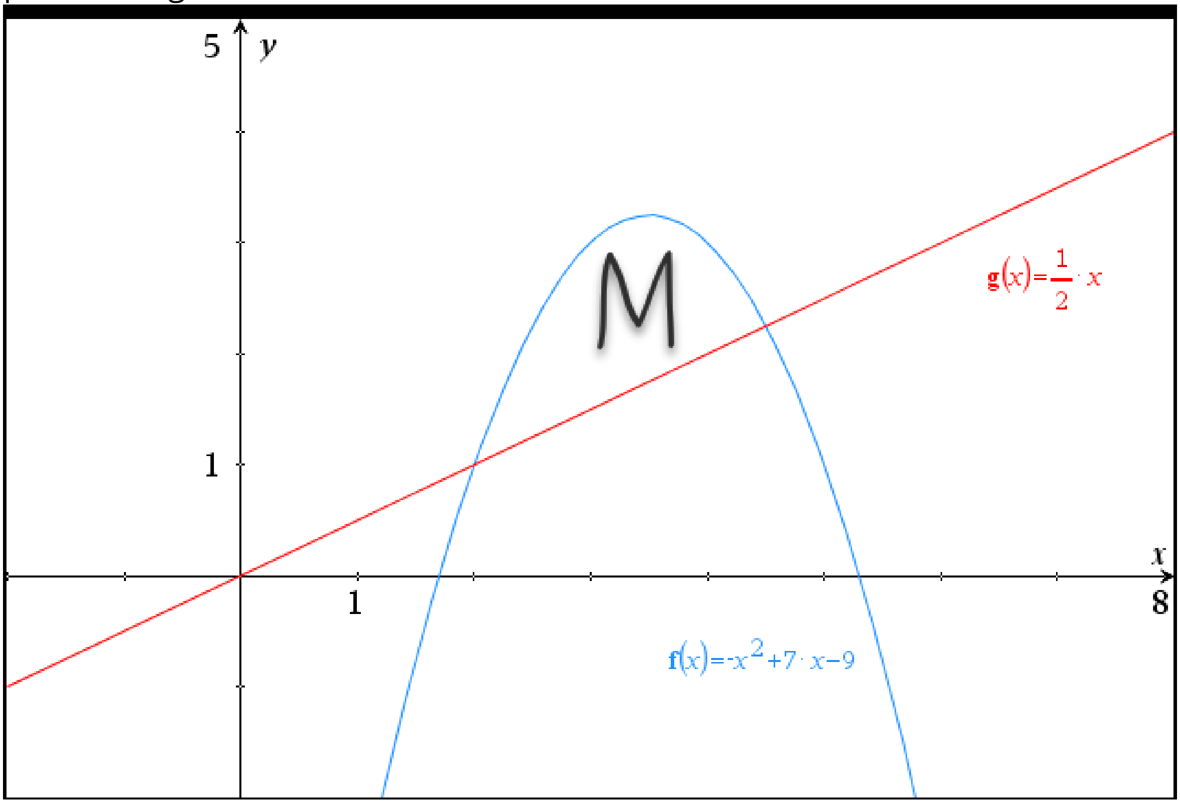
3. Klik på, vælg

Grafindtastning/Redigér → Funktion

og indtast så forskriften for g og tryk ENTER:



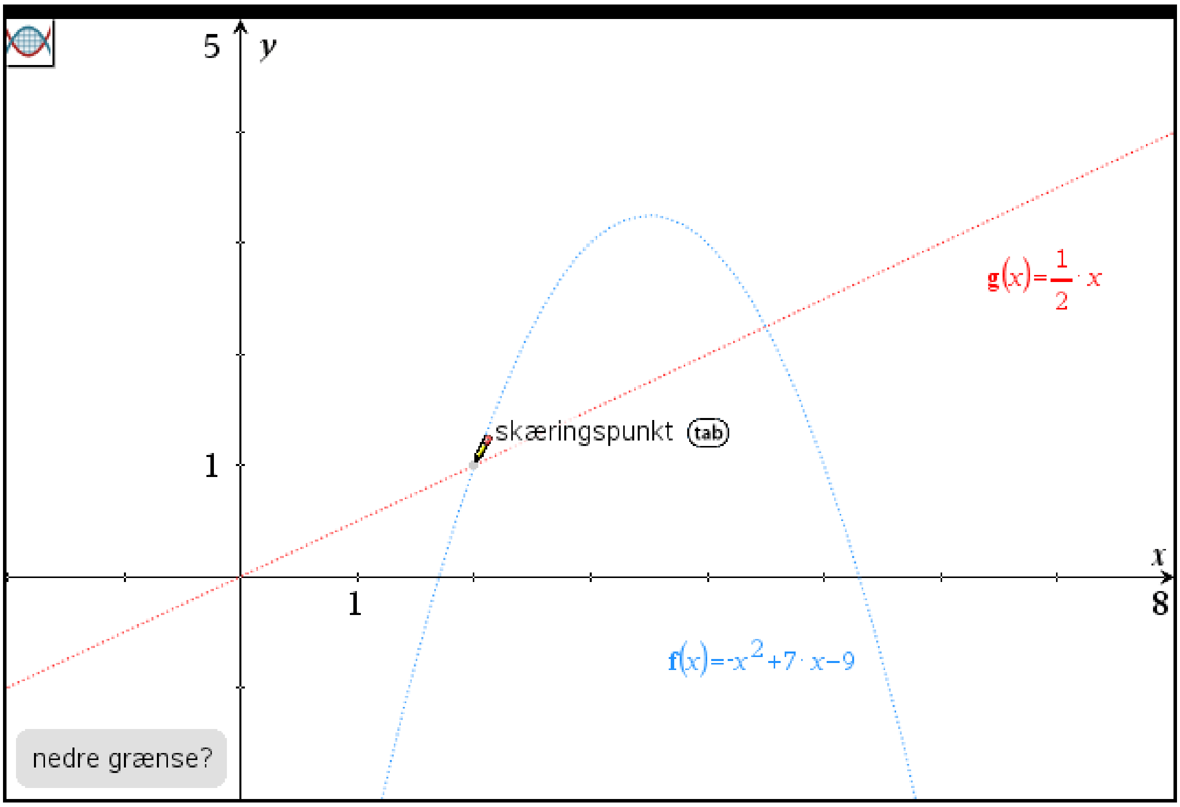
Programmet viser så graferne for både f og g, hvilket gør det muligt at se punktmængden M:



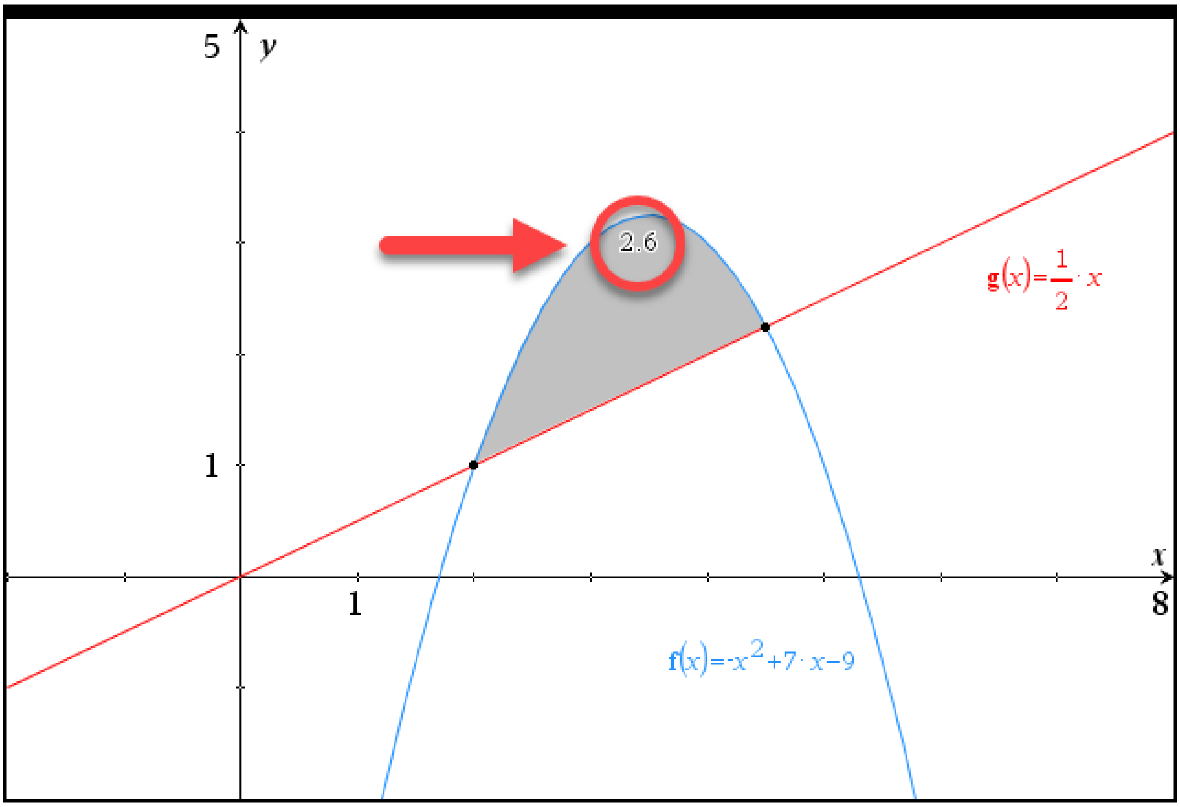
4. Klik nu på, vælg

Undersøg grafer → Areal af område

og klik først på det venstre skæringspunkt mellem graferne og så på det højre skæringspunkt mellem graferne:



5. Programmet bestemmer så arealet af punktmængden og viser resultatet oven i punktmængden:



6. Fra skærmbilledet kan vi aflæse at arealet af M er 2,6.

6.5 Bestem areal af punktmængde (symbolsk)

Problem

Du ønsker at bruge en symbolsk tilgang til at bestemme arealet af en punktmængde der er afgrænset af en eller flere funktionsgrafer (og evt. koordinatakser).

Løsning

Bestem grænserne for punktmængden (langs x-aksen) og brug matematikskabelonen. Se eksemplerne nedenfor.

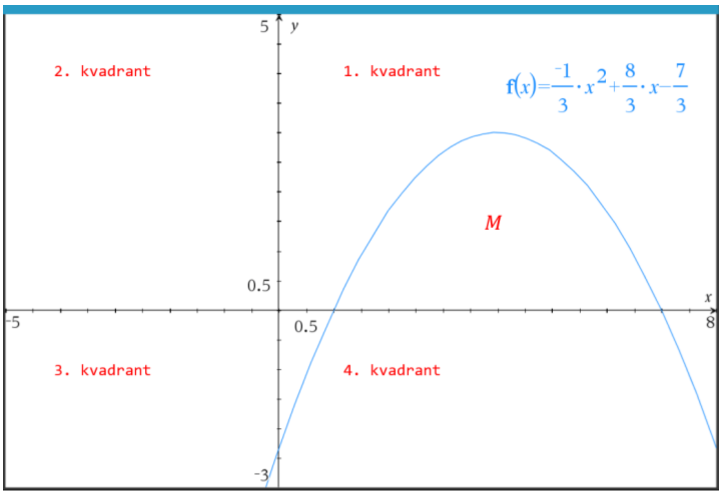
Eksempel 6.5.1: Punktmængde afgrænset af graf og koordinatakse

En funktion f er givet ved

$$f(x) = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{8}{3}x - \frac{7}{3}.$$

Grafen for f afgrænser sammen med førsteaksen en punktmængde M i første kvadrant. Bestem arealet af M.

Først tegnes grafen for f (Opskrift 1.3) for at få et overblik over situationen:



Derefter løses ligningen $f(x) = 0$ (Opskrift 2.1) for at finde grænserne for M (grafens skæringspunkter med x-aksen):

$$\text{solve}(\mathbf{f}(x) = 0, x) \blacktriangleright x=1 \text{ or } x=7$$

Endelig bestemmes arealet af M ved integration (Opskrift 6.1):

$$\int_1^7 \mathbf{f}(x)\,\mathrm{d}x \blacktriangleright 12$$

Arealet af punktmængden M er altså 12.

Tip: Akser og kvadranter
Koordinatsystemets vandrette akse ("x-aksen") kaldes også for **førsteaksen**. Den lodrette akse ("y-aksen") kaldes også for **andenaksen**. Disse to akser inddeler koordinatsystemet i fire områder, der kaldes for **kvadranter**:

2. kvadrant	1. kvadrant
3. kvadrant	4. kvadrant

Eksempel 6.5.2 nedenfor viser hvordan man symbolsk kan bestemme arealet af en punktmængde der er afgrænset af to grafer.

Eksempel 6.5.2: Bestem areal af punktmængde afgrænset af to grafer

To funktioner f og g er givet ved

$$f(x) = -x^2 + 7x - 9$$

$$g(x) = \frac{1}{2}x$$

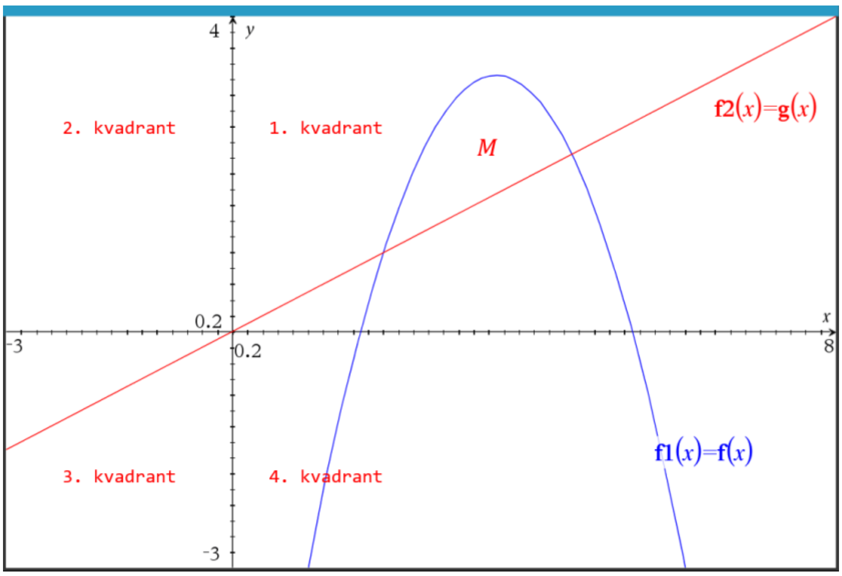
Graferne for f og g afgrænser i første kvadrant en punktmængde M. Bestem arealet af M.

Først defineres funktionerne (Opskrift 1.1):

$$\mathbf{f}(x) := -x^2 + 7 \cdot x - 9 \;\blacktriangleright\; \mathit{Udført}$$

$$\mathbf{g}(x) := \frac{1}{2} \cdot x \;\blacktriangleright\; \mathit{Udført}$$

Derefter tegnes graferne for funktionerne (Opskrift 1.3) for at skabe overblik over situationen:



Herefter findes grænserne for M (langs x-aksen) ved at bestemme x-koordinaterne til grafernes skæringspunkter (Opskrift 1.4):

$$\mathrm{solve}(\mathbf{f}(x) = \mathbf{g}(x),\ x) \blacktriangleright x=2.\ \text{or}\ x=4.5$$

Endelig bestemmes arealet af M ved at beregne $\int_2^{4,5} f(x)\,dx - \int_2^{4,5} g(x)\,dx$ (arealet under øverste graf minus arealet under nederste graf):

$$\int_2^{4.5} \mathbf{f}(x)\,\mathrm{d}x - \int_2^{4.5} \mathbf{g}(x)\,\mathrm{d}x \blacktriangleright 2.60417$$

Arealet af M er altså ca. 2,604.

De følgende eksempler behandler nogle mere avancerede arealproblemer.

Eksempel 6.5.3: Punktmængde afgrænset af skiftende grafer

To funktioner f og g er givet ved

$$f(x) = \frac{1}{\ln(2)} \cdot \ln(x)$$
$$g(x) = -0{,}5x + 4$$

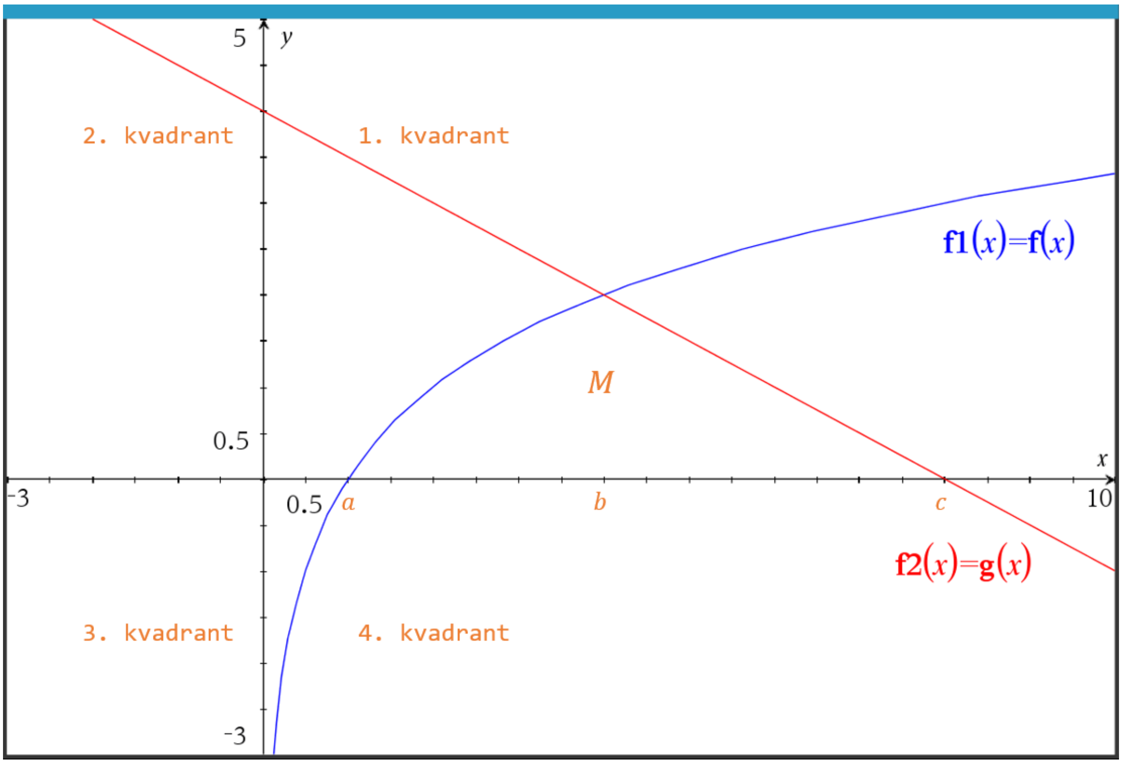
Graferne for de to funktioner f og g afgrænser sammen med førsteaksen et område M. Bestem arealet af M.

Først defineres funktionerne (Opskrift 1.1):

$$\mathbf{f}(x) := \frac{1}{\ln(2)} \cdot \ln(x) \blacktriangleright \mathit{Udført}$$

$$\mathbf{g}(x) := -0.5 \cdot x + 4 \blacktriangleright \mathit{Udført}$$

Herefter tegnes graferne for funktionerne (Opskrift 1.3) for at skabe et overblik over situationen:



Fra tegningen fremgår det at grafen for f udgør den øverste del af M frem til skæringspunktet mellem de to grafer; herefter udgør grafen for g den øverste del af M. Så arealet af M må være givet ved

$$\text{Areal}(M) = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c g(x)\,dx \qquad (*)$$

hvor a, b og c, som vist på tegningen, betegner x-koordinaterne til hhv.

- det punkt hvor grafen for f skærer x-aksen
- det punkt hvor graferne for f og g skærer hinanden
- det punkt hvor grafen for g skærer x-aksen

Disse tal findes ved at løse ligningerne $f(x) = 0$, $f(x) = g(x)$ og $g(x) = 0$:

$$\text{solve}(\mathbf{f}(x) = 0,\ x) \blacktriangleright x=1$$

$$\text{solve}(\mathbf{f}(x) = \mathbf{g}(x),\ x) \blacktriangleright x=4.$$

$$\text{solve}(\mathbf{g}(x) = 0,\ x) \blacktriangleright x=8.$$

Så det følger fra $(*)$ at arealet af M er lig med

$$\int_1^4 \mathbf{f}(x)\,\mathrm{d}x + \int_4^8 \mathbf{g}(x)\,\mathrm{d}x \blacktriangleright 7.67191$$

Arealet af M er altså ca. 7,672.

Eksempel 6.5.4: Bestem grænse så et givet areal opnås

En funktion f er givet ved

$$f(x) = \frac{1}{3}x^2 + 2x + 4.$$

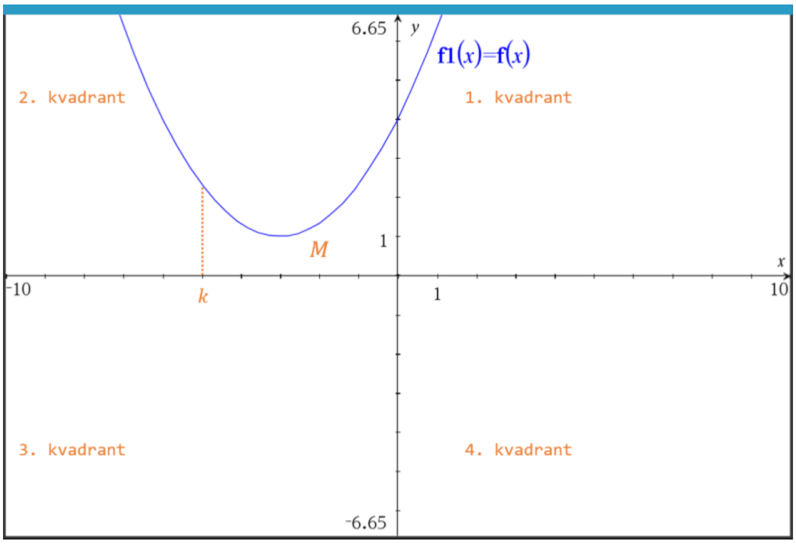
En linje er givet ved ligningen $x = k$, hvor k er en konstant.

Grafen for f afgrænser sammen med førsteaksen og linjen $x = k$ en punktmængde M i anden kvadrant. Bestem k så arealet af M bliver 9.

Først defineres funktionen (Opskrift 1.1):

$$\mathbf{f}(x) := \frac{1}{3} \cdot x^2 + 2 \cdot x + 4 \;\blacktriangleright\; \mathit{Udført}$$

Herefter tegnes grafen for funktionen (Opskrift 1.3) for at skabe et overblik over situationen:



Fra tegningen fremgår det at arealet af M er givet ved

$$\text{Areal}(M) = \int_k^0 f(x)\,dx.$$

Opgaven kan derfor besvares ved at løse ligningen

$$\int_k^0 f(x)\,dx = 9$$

med hensyn til k. Dette kan gøres med `solve`:

$$\text{solve}\left(\int_k^0 \mathbf{f}(x)\,\mathrm{d}x = 9, k\right) \;\blacktriangleright\; k = -5.04698$$

Altså skal man vælge $k \approx -5{,}047$ for at arealet af M bliver 9.

6.6 Bestem rumfang af omdrejningslegeme

Problem

Du ønsker at bestemme rumfanget af et omdrejningslegeme der fremkommer ved at dreje grafen for en funktion 360° om x-aksen.

Løsning

Brug formlen for rumfanget af et omdrejningslegeme (formel (172) i formelsamlingen):

$$V = \pi \cdot \int_a^b f(x)^2 \, dx$$

Eksempel 6.6.1: Bestem rumfang af omdrejningslegeme

En funktion f er givet ved

$$f(x) = -x^3 + 2x^2 + x - 2.$$

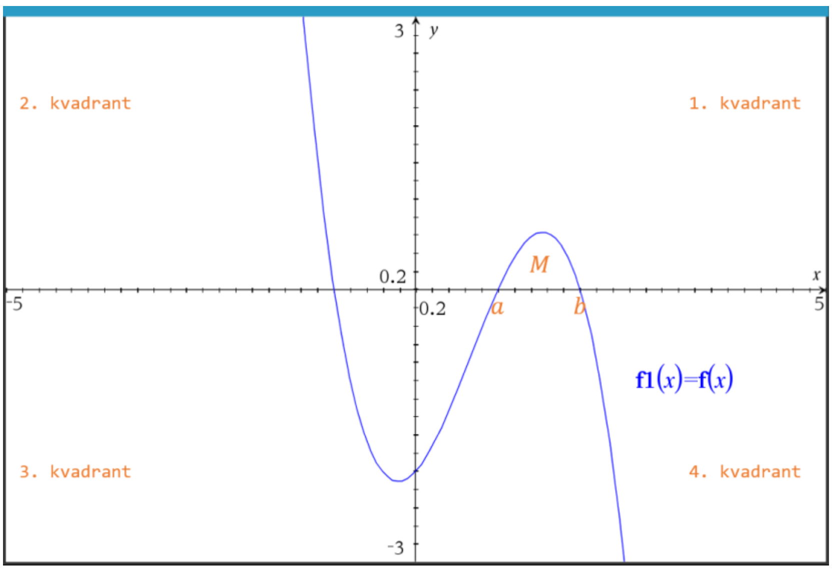
Grafen for f afgrænser sammen med førsteaksen en punktmængde$M$ i første kvadrant.

Bestem rumfanget af det omdrejningslegeme der fremkommer når M drejes 360° omkring førsteaksen.

Først defineres funktionen (Opskrift 1.1):

$$\mathbf{f}(x) := -x^3 + 2 \cdot x^2 + x - 2 \;\blacktriangleright\; \mathit{Udført}$$

Herefter tegnes grafen for funktionen (Opskrift 1.3) for at skabe et overblik over situationen:



Integrationsgrænserne a og b findes ved at løse ligningen $f(x) = 0$:

$$\text{solve}(\mathbf{f}(x) = 0,\ x) \blacktriangleright x{=}{-1} \text{ or } x{=}1 \text{ or } x{=}2$$

Ved at sammenholde dette med tegningen ser vi at $a = 1$ og $b = 2$. Dette indsættes nu i rumfangsformlen:

$$\pi \cdot \int_1^2 (\mathbf{f}(x))^2 \, \mathrm{d}x \blacktriangleright 0.658238$$

Rumfanget af det omdrejningslegeme der fremkommer når M drejes 360° omkring førsteaksen er altså ca. 0,6582.

Her følger nogle lidt mere avancerede eksempler.

Eksempel 6.6.2: Bestem rumfang af omdrejningslegeme (skiftende grafer)

To funktioner f og g er givet ved

$$f(x) = \frac{1}{\ln(2)} \cdot \ln(x)$$
$$g(x) = -0{,}5x + 4$$

Graferne for de to funktioner f og g afgrænser sammen med førsteaksen et område M.

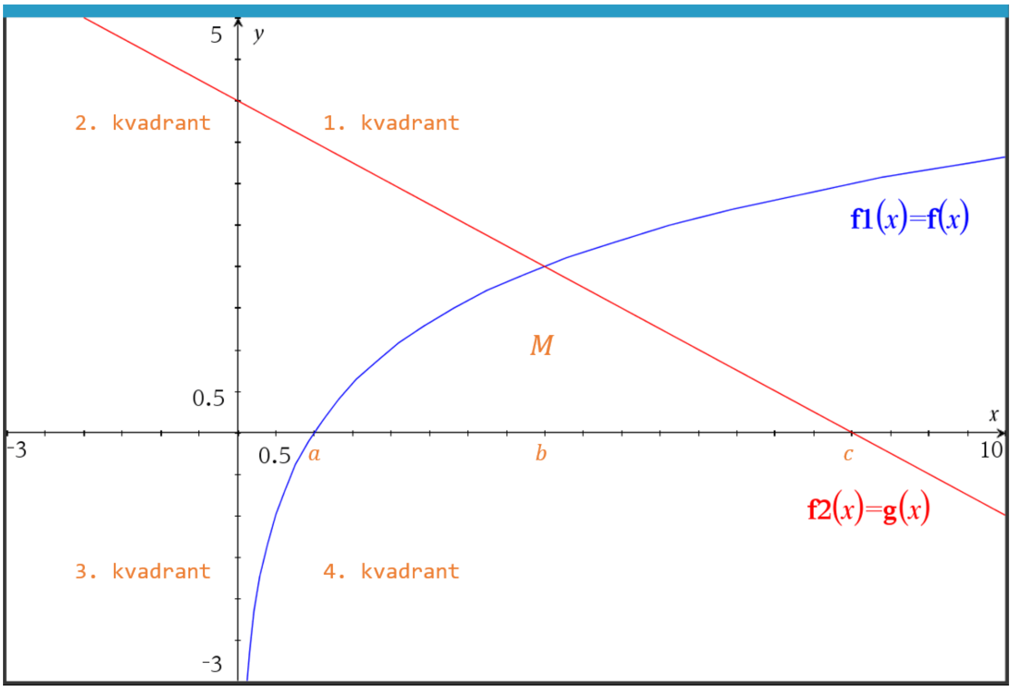
Bestem rumfanget af det omdrejningslegeme der fremkommer når M drejes 360° omkring førsteaksen.

Først defineres funktionerne (Opskrift 1.1):

$$\mathbf{f}(x) := \frac{1}{\ln(2)} \cdot \ln(x) \blacktriangleright \mathit{Udført}$$

$$\mathbf{g}(x) := -0.5 \cdot x + 4 \blacktriangleright \mathit{Udført}$$

Herefter tegnes graferne for funktionerne (Opskrift 1.3) for at skabe et overblik over situationen:



Fra tegningen fremgår det at grafen for f udgør den øverste del af M frem til skæringspunktet mellem de to grafer; herefter udgør grafen for g den øverste del af M. Så det søgte rumfang V må være givet ved

$$V = \pi \cdot \int_a^b f(x)^2\,dx + \pi \cdot \int_b^c g(x)^2\,dx \qquad (*)$$

hvor a, b og c, som vist på tegningen, betegner x-koordinaterne til hhv.

- det punkt hvor grafen for f skærer x-aksen
- det punkt hvor graferne for f og g skærer hinanden
- det punkt hvor grafen for g skærer x-aksen

Disse tal findes ved at løse ligningerne $f(x) = 0$, $f(x) = g(x)$ og $g(x) = 0$:

$$\text{solve}(\mathbf{f}(x) = 0,\ x) \blacktriangleright x=1$$

$$\text{solve}(\mathbf{f}(x) = \mathbf{g}(x),\ x) \blacktriangleright x=4.$$

$$\text{solve}(\mathbf{g}(x) = 0,\ x) \blacktriangleright x=8.$$

Så det følger fra $(*)$ at det søgte rumfang er lig med

$$\pi \cdot \int_1^4 (f(x))^2\,dx + \pi \cdot \int_4^8 (g(x))^2\,dx \blacktriangleright 33.7358$$

Rumfanget af det omdrejningslegeme der fremkommer når M drejes 360° omkring førsteaksen er altså ca. 33,74.

Eksempel 6.6.3: Bestem grænse så givet rumfang opnås

En funktion f er givet ved

$$f(x) = \ln(x^2 + 1) - 1.$$

En linje er givet ved ligningen $x = k$, hvor $k > 2$ er en konstant.

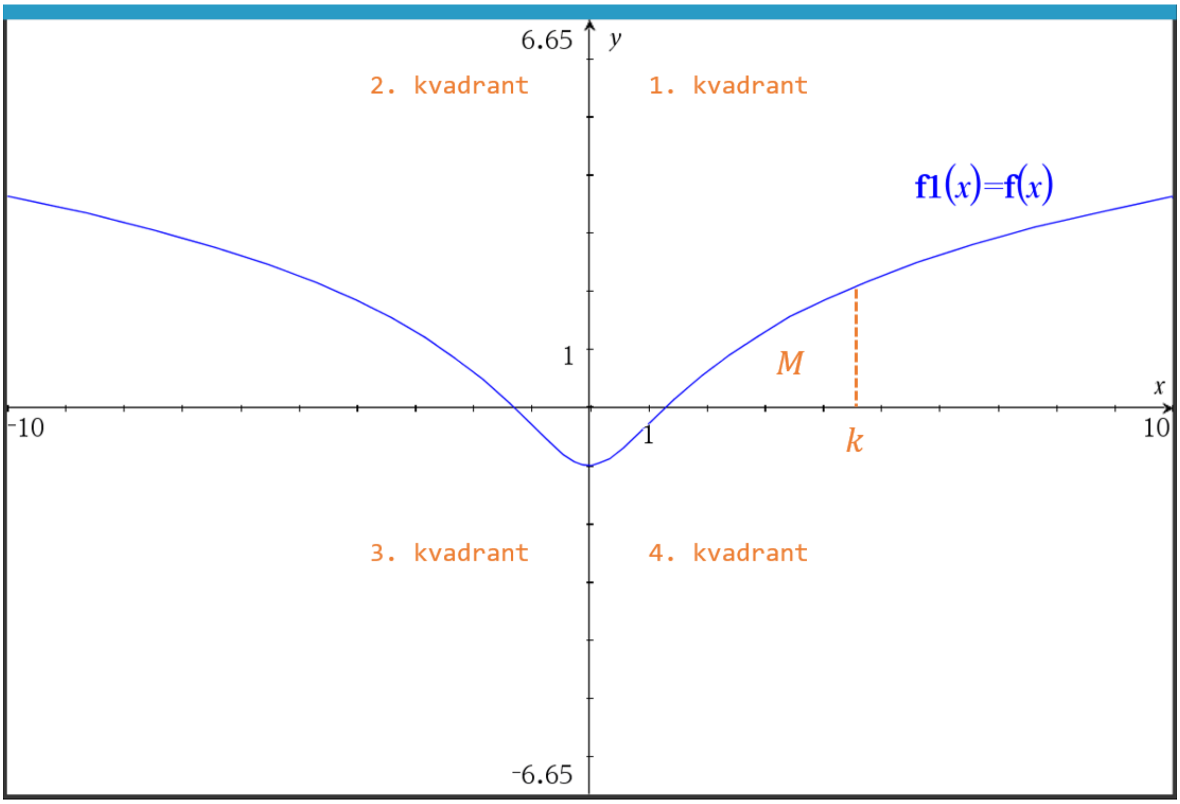
Grafen for f afgrænser sammen med førsteaksen og linjen $x = k$ en punktmængde M i første kvadrant.

Bestem k således at rumfanget af det omdrejningslegeme der fremkommer når M drejes 360° omkring førsteaksen bliver 10.

Først defineres funktionen (Opskrift 1.1):

$$\mathbf{f}(x) := \ln(x^2 + 1) - 1 \;\blacktriangleright\; \mathit{Udført}$$

Derefter tegnes grafen for funktionen (Opskrift 1.3) for at skabe et overblik over situationen:



Ligningen $f(x) = 0$ løses for at bestemme den nedre grænse for M:

$$\text{solve}(\mathbf{f}(x) = 0, x) | x > 0 \;\blacktriangleright\; x = \sqrt{\mathbf{e} - 1}$$

Ifølge rumfangsformlen er omdrejningslegemets rumfang givet ved

$$V = \pi \cdot \int_{\sqrt{e-1}}^{k} f(x)^2 \, dx$$

Så opgaven kan besvares ved at løse ligningen

$$\pi \cdot \int_{\sqrt{e-1}}^{k} f(x)^2\, dx = 10$$

med hensyn til k. Dette kan gøres med `solve`:

$$\text{solve}\left(\pi \cdot \int_{\sqrt{\mathbf{e}-1}}^{k} \left(\mathbf{f}(x)\right)^2 \mathrm{d}x = 10, k\right) \blacktriangleright\ k = 3.8746$$

Så med $k \approx 3{,}875$ bliver rumfanget af omdrejningslegemet 10.

6.7 Bestem rumfang af hult omdrejningslegeme

Problem

En punktmængde afgrænses af grafen for to funktioner, og du ønsker at bestemme rumfanget af det omdrejningslegeme der fremkommer ved at dreje punktmængden 360° om x-aksen.

Løsning

Brug formlen for et hult omdrejningslegeme:

$$V = \pi \cdot \int_a^b \left(f(x)^2 - g(x)^2\right) dx$$

hvor f er den funktion hvis graf ligger øverst, og g er den funktion hvis graf ligger nederst. Se Eksempel 6.7.1 nedenfor.

Eksempel 6.7.1: Bestem rumfang af hult omdrejningslegeme

Graferne for disse funktioner afgrænser i første kvadrant en punktmængde M:

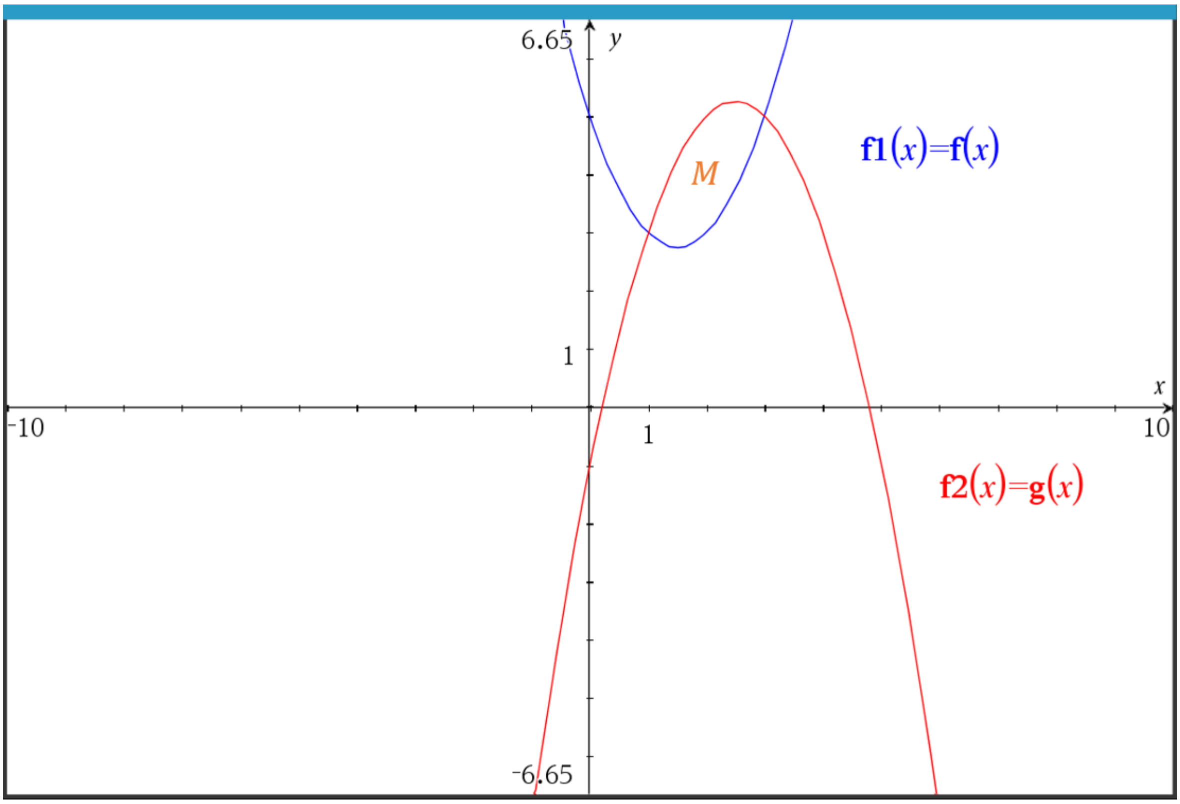
$$f(x) = x^2 - 3x + 5$$
$$g(x) = -x^2 + 5x - 1$$

Bestem rumfanget af det omdrejningslegeme der fremkommer når M drejes 360° om koordinatsystemets førsteakse.

Først defineres funktionerne:

$$\mathbf{f}(x) := x^2 - 3 \cdot x + 5 \blacktriangleright\ \mathit{Udført}$$
$$\mathbf{g}(x) := -x^2 + 5 \cdot x - 1 \blacktriangleright\ \mathit{Udført}$$

Derefter tegnes deres grafer for at skabe et overblik over situationen:



Grænserne for M findes ved at løse ligningen $f(x) = g(x)$ (Opskrift 1.4):

$$\text{solve}(\mathbf{f}(x) = \mathbf{g}(x),\ x) \blacktriangleright x=1 \text{ or } x=3$$

Dette indsættes nu i formlen for rumfanget af et hult omdrejningslegeme:

$$\pi \cdot \int_1^3 (g(x)^2 - f(x)^2)\, dx \blacktriangleright 67.0206$$

(Bemærk at g her skrives først da grafen for g ligger øverst inden for integrationsintervallet $1 \leq x \leq 3$, jf. tegningen). Rumfanget af omdrejningslegemet er altså ca. 67,02.

6.8 Bestem kurvelængde

Problem

Du ønsker at bestemme længden af et stykke af grafen for en funktion.

Løsning

Brug kommandoen **`arcLen`**. Se Eksempel 6.8.1 og 6.8.2.

Eksempel 6.8.1: Bestem kurvelængde

En funktion f er givet ved

$$f(x) = 0{,}5x^2 - 2x + 3.$$

Bestem kurvelængden af grafen for f fra punktet $A(0, f(0))$ til punktet $B(4, f(4))$.

Først defineres funktionen (Opskrift 1.1):

$$\mathbf{f}(x) := 0.5 \cdot x^2 - 2 \cdot x + 3 \;\blacktriangleright\; \mathit{Udført}$$

Derefter bruges kommandoen `arcLen`, hvor man skal angive:

- funktionen
- navnet på den uafhængige variabel (her x)
- punkternes x-koordinater (her hhv. 0 og 4)

Det ser således ud:

$$\mathrm{arcLen}(\mathbf{f}(x),\ x,\ 0,\ 4) \;\blacktriangleright\; 5.91577$$

Kurvelængden af grafen for f fra punktet $A(0, f(0))$ til punktet $B(4, f(4))$ er altså ca. 5,916.

Eksempel 6.8.2: Bestem grænse så given kurvelængde opnås

En funktion f er givet ved

$$f(x) = x^2.$$

Bestem det positive tal k der gør at kurvelængden L af grafen for f fra punktet $A(-2, f(-2))$ til punktet $B(k, f(k))$ bliver 10.

Ligningen $L = 10$ løses med hensyn til k:

$$\mathrm{solve}(\mathrm{arcLen}(x^2,\ x,\ -2,\ k) = 10,\ k)|k>0 \;\blacktriangleright\; k=2.16493 ⚠$$

Man skal altså vælge $k \approx 2{,}165$ for at kurvelængden af grafen for f fra punktet $A(-2, f(-2))$ til punktet $B(k, f(k))$ bliver 10.

7. Vektorfunktioner (Nspire)

7.1 Definér vektorfunktion

Problem

Du ønsker at definere en vektorfunktion således at du kan arbejde med den.

Løsning

Skriv funktionsforskriften (med et kolon foran lighedstegnet!) og tryk så ENTER.

Eksempel 7.1.1: Definér vektorfunktion og bestem funktionsværdi

En vektorfunktion $\vec{r}$ er givet ved

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t^2 - t \\ t^3 \end{pmatrix}.$$

Bestem $\vec{r}(-1)$.

Først defineres vektorfunktionen:

$$\mathbf{r}(t) := [t^2 - t\,; t^3] \blacktriangleright \textit{Udført}$$

Nu hvor vektorfunktionen er defineret, kan man indtaste $r(-1)$ for at bestemme denne funktionsværdi:

$$\mathbf{r}(-1) \blacktriangleright \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Altså er $\vec{r}(-1) = \binom{2}{-1}$.

7.2 Tegn banekurve

Problem

Du ønsker at tegne banekurven for en vektorfunktion.

Løsning

I applikationen *Grafer*: Vælg *Grafindtastning/Redigér* → *Parameterfremstilling* og indtast så vektorfunktionens koordinatfunktioner (og evt. definitionsmængde).

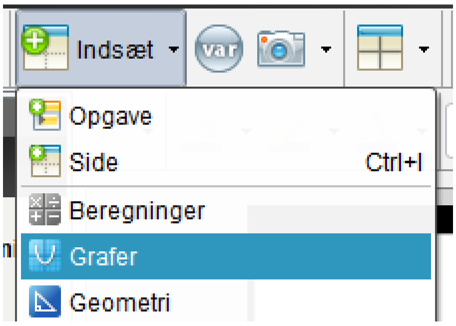
Eksempel 7.2.1: Tegn banekurve for vektorfunktion

En vektorfunktion $\vec{r}$ er givet ved

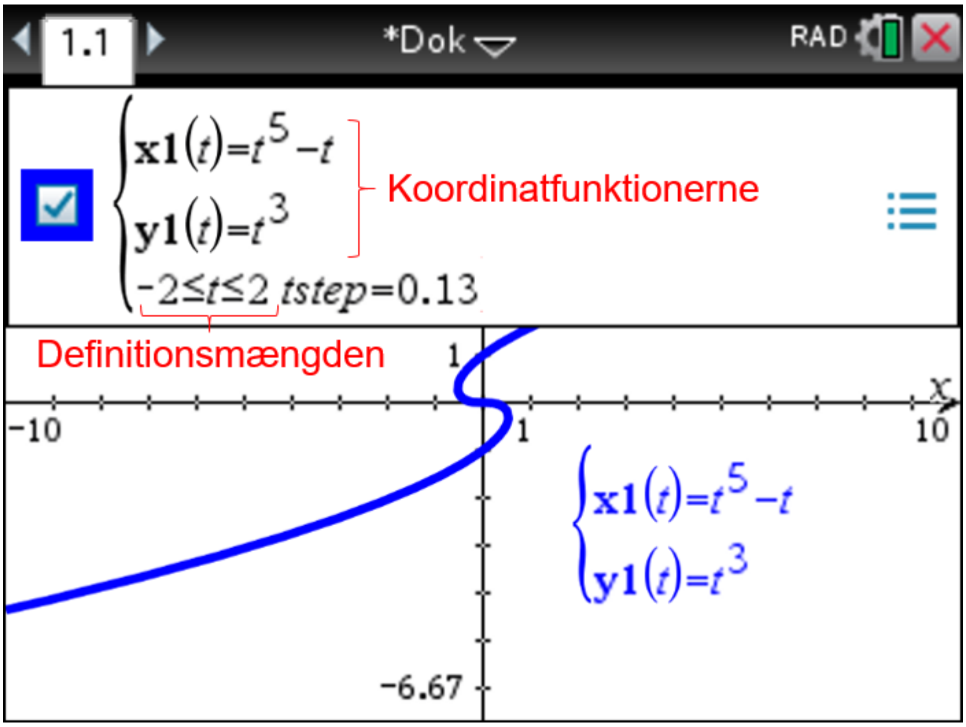
$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t^5 - t \\ t^3 \end{pmatrix}, \qquad -2 \leq t \leq 2.$$

Tegn banekurven for $\vec{r}$.

1. Tilføj applikationen *Grafer*:



2. Klik på  og vælg *Grafindtastning/Redigér* → *Parameterfremstilling*. Angiv herefter de to koordinatfunktioner samt definitionsmængden og tryk så ENTER. (Hvis definitionsmængden ikke er angivet, så vælg f.eks. $-10 \leq t \leq 10$).



7.3 Find skæringspunkter med koordinatakserne

Problem

Du kender forskriften for en vektorfunktion og ønsker at finde ud af hvor (eller om) dens banekurve skærer x-aksen og/eller y-aksen.

Løsning

Sæt de to koordinatfunktioner lig 0 og løs de resulterende ligninger hver for sig.

Eksempel 7.3.1: Find banekurves skæringspunkter med koordinatakserne

En vektorfunktion $\vec{r}$ er givet ved

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t^2 + 2t \\ t^3 - 2t \end{pmatrix}.$$

Bestem koordinatsættene til skæringspunkterne mellem banekurven og koordinatakserne.

Først defineres koordinatfunktionerne og vektorfunktionen:

$$\mathbf{x}(t) := t^2 + 2 \cdot t \ \blacktriangleright \ \mathit{Udført}$$

$$\mathbf{y}(t) := t^3 - 2 \cdot t \ \blacktriangleright \ \mathit{Udført}$$

$$\mathbf{r}(t) := [\mathbf{x}(t) \ ; \ \mathbf{y}(t)] \ \blacktriangleright \ \mathit{Udført}$$

y-aksen er mængden af punkter hvis x-koordinat er 0. Ligningen $x(t) = 0$ løses derfor for at finde banekurvens skæringspunkter med y-aksen:

$$\text{solve}(\mathbf{x}(t) = 0, \ t) \ \blacktriangleright \ t=-2 \text{ or } t=0$$

Det ses at ligningen har to løsninger, hvilket betyder at banekurven har to skæringspunkter med y-aksen. Skæringspunkternes koordinatsæt bestemmes ved at indsætte løsningerne i vektorfunktionen:

$$\mathbf{r}(-2) \ \blacktriangleright \ \begin{bmatrix} 0 \\ -4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{r}(0) \ \blacktriangleright \ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Banekurven skærer altså y-aksen i punkterne $(0, -4)$ og $(0{,}0)$.

Skæringspunkterne med x-aksen findes på tilsvarende vis ved at løse ligningen $y(t) = 0$.

7.4 Undersøg om punkt ligger på banekurve

Problem

Du kender forskriften for en vektorfunktion $\vec{r}(t)$ og ønsker at finde ud af om banekurven går igennem et bestemt punkt P.

Løsning

Definér vektorfunktionen og løs ligningen $\vec{r}(t) = P$ ved hjælp af `solve`.

Eksempel 7.4.1: Undersøg om banekurven går gennem givet punkt

En vektorfunktion $\vec{r}$ er givet ved

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t^2 + 2t \\ t^3 - 2t \end{pmatrix}$$

Undersøg om banekurven går gennem punkterne $P(-1{,}1)$ og $Q(2,-1)$.

Først defineres vektorfunktionen som vist i Opskrift 7.1:

$$\mathbf{r}(t) := [t^2 + 2 \cdot t\,;\; t^3 - 2 \cdot t] \;\blacktriangleright\; \mathit{Udført}$$

Herefter løses ligningerne $\vec{r}(t) = P$ og $\vec{r}(t) = Q$ hver for sig:

$$\text{solve}(\mathbf{r}(t) = [-1\,;\,1], t) \;\blacktriangleright\; t = -1$$

$$\text{solve}(\mathbf{r}(t) = [2\,;\,-1], t) \;\blacktriangleright\; \text{false}$$

Det ses at ligningen $\vec{r}(t) = P$ har løsningen $t = -1$ imens ligningen $\vec{r}(t) = Q$ ikke har nogen løsninger. Dette betyder at banekurven går gennem P (når $t = -1$), imens banekurven *ikke* går gennem Q.

Eksempel 7.4.2: Bestem parameterværdier hørende til dobbeltpunkt

En vektorfunktion $\vec{r}$ er givet ved

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t^2 - t \\ t^3 - 3t \end{pmatrix}.$$

Det oplyses at $Q(2{,}2)$ er et dobbeltpunkt på banekurven.

Bestem de tilhørende parameterværdier.

Først defineres vektorfunktionen som vist i Opskrift 7.1:

$$\mathbf{r}(t) := [t^2 - t\,;\; t^3 - 3 \cdot t] \;\blacktriangleright\; \mathit{Udført}$$

Herefter løses ligningen $\vec{r}(t) = Q$:

$$\text{solve}(\mathbf{r}(t) = [2\ ;\ 2],\ t) \ \blacktriangleright\ t = -1 \text{ or } t = 2$$

Så parameterværdierne hørende til dobbeltpunktet $Q(2,2)$ er $t = -1$ og $t = 2$.

7.5 Find dobbeltpunkt på banekurve

Problem

Du kender forskriften for en vektorfunktion $\vec{r}(t)$ og ønsker at finde eventuelle dobbeltpunkter på dens banekurve.

Løsning

Hvis man kender en parameterværdi hørende til et dobbeltpunkt, så kan man bestemme koordinatsættet til dobbeltpunktet (Eksempel 7.1.1) og så gå frem som i Opskrift 7.4. Hvis man ikke ved hvor man skal lede efter eventuelle dobbeltpunkter, så kan man altid finde dem ved at løse ligningen $\vec{r}(t_1) = \vec{r}(t_2)$.

Eksempel 7.5.1: Find dobbeltpunkt når en parameterværdi er kendt

En vektorfunktion $\vec{r}$ er givet ved

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t^2 - t \\ t^3 - 3t \end{pmatrix}.$$

På banekurven er punktet Q et dobbeltpunkt hørende til t-værdierne 2 og t_0.

Bestem koordinatsættet til Q, og bestem t_0.

Først defineres vektorfunktionen som vist i Opskrift 7.1:

$$\mathbf{r}(t) := [t^2 - t\ ;\ t^3 - 3 \cdot t] \ \blacktriangleright\ \mathit{Udført}$$

Herefter udregnes $\vec{r}(2)$ da det oplyses at Q fremkommer når $t = 2$:

$$\mathbf{r}(2) \ \blacktriangleright\ \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Altså er $Q = (2,2)$. Den anden parameterværdi findes nu ved at løse ligningen $\vec{r}(t) = Q$, jf. Opskrift 7.4:

$$\text{solve}(\mathbf{r}(t) = [2\ ;\ 2],\ t) \ \blacktriangleright\ t = -1 \text{ or } t = 2$$

Den anden parameterværdi er altså $t_0 = -1$.

Eksempel 7.5.2: Find eventuelle dobbeltpunkter

En vektorfunktion $\vec{r}$ er givet ved

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t^2 - t \\ t^3 - 3t \end{pmatrix}.$$

Bestem koordinatsættene til eventuelle dobbeltpunkter på banekurven.

Først defineres vektorfunktionen som vist i Opskrift 7.1:

$$\mathbf{r}(t) := [t^2 - t\,;\ t^3 - 3\cdot t] \ \blacktriangleright\ \mathit{Udført}$$

Herefter løses ligningen $\vec{r}(t_1) = \vec{r}(t_2)$ for at finde eventuelle dobbeltpunkter:

$$\mathrm{solve}(\mathbf{r}(t1) = \mathbf{r}(t2),\ t1,\ t2)|t1<t2 \ \blacktriangleright\ t1=-1 \text{ and } t2=2$$

(Betingelsen $t_1 < t_2$ kan undlades, men så bliver eventuelle løsninger gentaget; eksempelvis får man både $t_1 = -1$, $t_2 = 2$ og $t_1 = 2$, $t_2 = -1$).

Det ses at ligningen har løsningen $t_1 = -1$, $t_2 = 2$. Man får altså samme punkt når man indsætter $t = -1$ som når man indsætter $t = 2$:

$$\mathbf{r}(-1) \ \blacktriangleright\ \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{r}(2) \ \blacktriangleright\ \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Banekurven har altså et enkelt dobbeltpunkt, nemlig $Q = (2, 2)$.

7.6 Bestem tangent til banekurve

Problem

Du ønsker at bestemme en tangent til en banekurve for en vektorfunktion.

Løsning

For en vektorfunktion $\vec{r}$ er tangenten hørende til parameterværdien t_0 den rette linje der går gennem punktet $(x(t_0), y(t_0))$ og har $\vec{r}\,'(t_0)$ som en retningsvektor (hvor x og y betegner vektorfunktionens koordinatfunktioner); tangenten er således givet ved parameterfremstillingen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t_0) \\ y(t_0) \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} x'(t_0) \\ y'(t_0) \end{pmatrix} \tag{$*$}$$

Så man skal finde $(x(t_0), y(t_0))$ og $\vec{r}\,'(t_0)$.

Eksempel 7.6.1: Bestem tangent til banekurve (kendt parameterværdi)

En vektorfunktion $\vec{r}$ er givet ved

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t^2 - t \\ t^3 - 3t \end{pmatrix}.$$

Bestem en parameterfremstilling for tangenten til parameterkurven til tidspunktet $t = -2$.

Her er parameterværdien kendt: $t = -2$. Ud fra denne kan punktet og retningsvektoren bestemmes. Først defineres vektorfunktionen:

$$\mathbf{r}(t) := [t^2 - t\,;\ t^3 - 3 \cdot t] \ \blacktriangleright\ \mathit{Udført}$$

Punktet bestemmes ved at indsætte $t = -2$:

$$\mathbf{r}(-2) \ \blacktriangleright\ \begin{bmatrix} 6 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Røringspunktet for tangenten er altså $(6, -2)$. Herefter bestemmes hastighedsvektoren $\vec{r}\,'(-2)$, der er en retningsvektor for tangenten:

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r}(t))|t = -2 \ \blacktriangleright\ \begin{bmatrix} -5 \\ 9 \end{bmatrix}$$

Oplysningerne indsættes nu i den generelle tangentparameterfremstilling $(*)$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Dette er en parameterfremstilling for tangenten til tidspunktet $t = -2$.

Eksempel 7.6.2: Bestem tangent til banekurve (kendt punkt)

En vektorfunktion $\vec{r}$ er givet ved

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t^2 - t \\ t^3 - 3t \end{pmatrix}.$$

Bestem en parameterfremstilling for tangenten til banekurven i $P(6,-2)$.

Her er tangentens røringspunkt kendt: $P(6,-2)$. Ud fra dette punkt kan parameterværdien findes (Opskrift 7.4):

$$\mathbf{r}(t) := [t^2 - t\ ;\ t^3 - 3 \cdot t] \ \blacktriangleright\ \mathit{Udført}$$

$$\mathrm{solve}(\mathbf{r}(t) = [6\ ;\ -2],\ t) \ \blacktriangleright\ t = -2$$

Parameterværdien hørende til punktet $P(6,-2)$ er altså $t = -2$. Nu kan den tilhørende hastighedsvektor $\vec{r}\,'(-2)$ findes:

$$\frac{d}{dt}\left(\mathbf{r}(t)\right)|t = -2 \ \blacktriangleright\ \begin{bmatrix} -5 \\ 9 \end{bmatrix}$$

Oplysningerne indsættes nu i den generelle tangentparameterfremstilling $(*)$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Dette er en parameterfremstilling for tangenten i punktet $P(6,-2)$.

Eksempel 7.6.3: Bestem tangent til banekurve (kendt dobbeltpunkt)

En vektorfunktion $\vec{r}$ er givet ved

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t^2 - t \\ t^3 - 3t \end{pmatrix}.$$

Punktet $Q(2,2)$ er et dobbeltpunkt for vektorfunktionens banekurve.

Bestem parameterværdierne hørende til punktet Q, og bestem for hver af disse parameterværdier en parameterfremstilling for den tilhørende tangent.

Først bestemmes t-værdierne hørende til dobbeltpunktet $Q(2,2)$ (Opskrift 7.4):

$$\mathbf{r}(t) := [t^2 - t\ ;\ t^3 - 3 \cdot t] \ \blacktriangleright\ \textit{Udført}$$

$$\text{solve}(\mathbf{r}(t) = [2\ ;\ 2],\ t) \ \blacktriangleright\ t=-1 \text{ or } t=2$$

Parameterværdierne hørende til dobbeltpunktet $Q(2,2)$ er altså $t = -1$ og $t = 2$. De tilhørende tangenter kan bestemmes som vist i Eksempel 7.6.1.
Tangenten hørende til parameterværdien $t = -1$ har følgende vektor som en retningsvektor:

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r}(t))|t = -1 \ \blacktriangleright\ \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dermed er

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

en parameterfremstilling for tangenten hørende til $t = -1$. Tangenten hørende til parameterværdien $t = 2$ har følgende vektor som en retningsvektor:

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r}(t))|t = 2 \ \blacktriangleright\ \begin{bmatrix} 3 \\ 9 \end{bmatrix}$$

Dermed er

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \end{pmatrix}$$

en parameterfremstilling for tangenten hørende til $t = 2$.

7.7 Find tangent der er parallel med en given linje

Problem

Du ønsker at finde en tangent der er parallel med en given linje.

Løsning

Benyt at enhver tangent er givet ved en parameterfremstilling på formen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t_0) \\ y(t_0) \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} x'(t_0) \\ y'(t_0) \end{pmatrix},$$

og at to vektorer er parallelle netop når deres determinant er 0 (Eksempel 4.5.2).

Eksempel 7.7.1: Tangenter der er parallelle med koordinatakserne

En vektorfunktion $\vec{r}$ er givet ved

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t^2 - t \\ t^3 - 3t \end{pmatrix}.$$

Bestem koordinatsættet til hvert af de punkter hvori banekurvens tangent er parallel med en af koordinatakserne.

Enhver tangent har $\vec{r}\,'(t_0)$ som en retningsvektor (for et eller andet tal t_0). Så spørgsmålet kan besvares ved at bestemme $\vec{r}\,'(t)$ og så undersøge hvornår dens x-koordinatfunktion er 0 (lodret tangent) og hvornår dens y-koordinatfunktion er 0 (vandret tangent).

Først defineres koordinatfunktionerne og vektorfunktionen (Opskrift 7.1):

$$\mathbf{x}(t) := t^2 - t \ \blacktriangleright\ \mathit{Udført}$$

$$\mathbf{y}(t) := t^3 - 3 \cdot t \ \blacktriangleright\ \mathit{Udført}$$

$$\mathbf{r}(t) := [\mathbf{x}(t)\ ;\ \mathbf{y}(t)] \ \blacktriangleright\ \mathit{Udført}$$

Herefter løses ligningen $x'(t) = 0$ for at finde ud af hvornår tangenten er parallel med y-aksen (når x-koordinatfunktionen er 0, så er tangenten lodret), og det tilhørende punkt bestemmes ved at indsætte løsningen i $\vec{r}(t)$:

$$\text{solve}\left(\frac{d}{dt}(\mathbf{x}(t)) = 0, t\right) \ \blacktriangleright\ t = 0.5$$

$$\mathbf{r}(0.5) \ \blacktriangleright\ \begin{bmatrix} -0.25 \\ -1.375 \end{bmatrix}$$

I punktet $(-0.25, -1.375)$ er der altså lodret tangent (dvs. en tangent der er parallel med y-aksen).

Tilsvarende løses ligningen $y'(t) = 0$ for at finde ud af hvornår tangenten er parallel med x-aksen, og de tilhørende løsninger indsættes i $\vec{r}(t)$:

$$\text{solve}\left(\frac{d}{dt}\left(\mathbf{y}(t)\right) = 0, t\right) \blacktriangleright \ t = -1 \text{ or } t = 1$$

$$\mathbf{r}(-1) \blacktriangleright \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{r}(1) \blacktriangleright \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix}$$

I punkterne $(2,2)$ og $(0,-2)$ er der altså vandret tangent (dvs. en tangent der er parallel med x-aksen).

Eksempel 7.7.2: Tangent der er parallel med linje (parameterfremstilling)

En vektorfunktion $\vec{r}$ er givet ved

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t^2 - t \\ t^3 - 3t \end{pmatrix}.$$

En linje l er givet ved parameterfremstillingen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 16 \end{pmatrix}.$$

Bestem koordinatsættet til hvert af de punkter hvori banekurvens tangent er parallel med linjen l.

Enhver tangent har $\vec{r}\,'(t_0)$ som en retningsvektor (for et eller andet tal t_0). Vi søger derfor de parameterværdier t_0 hvor $\vec{r}\,'(t_0)$ er parallel med retningsvektoren $\binom{2}{16}$, hvilket er ensbetydende med at determinanten $\det\left(\vec{r}'(t_0), \binom{2}{16}\right)$ er 0.

Først defineres vektorfunktionen:

$$\mathbf{r}(t) := \left[t^2 - t\ ;\ t^3 - 3 \cdot t\right] \blacktriangleright \ \mathit{Udført}$$

Herefter bestemmes den afledte funktion $\vec{r}\,'(t)$:

$$\mathbf{dr}(t) := \frac{d}{dt}\left(\mathbf{r}(t)\right) \blacktriangleright \ \mathit{Udført}$$

Endelig løses ligningen $\det\left(\vec{r}'(t), \binom{2}{16}\right) = 0$, jf. Opskrift 4.5:

$$\text{solve}\left(\det\left(\text{augment}\left(\mathbf{dr}(t), [2\ ;16]\right)\right) = 0, t\right) \blacktriangleright \ t = \frac{1}{3} \ \text{ or } \ t = 5$$

Dette viser at til tidspunkterne $t = \frac{1}{3}$ og $t = 5$ er tangenten parallel med l. Til sidst findes de tilhørende punkter ved at indsætte t-værdierne i $\vec{r}(t)$:

$$\mathbf{r}\left(\frac{1}{3}\right) \blacktriangleright \begin{bmatrix} -0.222222 \\ -0.962963 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{r}(5) \blacktriangleright \begin{bmatrix} 20 \\ 110 \end{bmatrix}$$

Punkterne hvori banekurvens tangent er parallel med linjen l er altså $(-0.22, -0.96)$ og $(20, 110)$.

Eksempel 7.7.3: Tangent der er parallel med linje (ligning)

En vektorfunktion $\vec{r}$ er givet ved

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t^2 - t \\ t^3 - 3t \end{pmatrix}.$$

En linje l er givet ved ligningen $8x - y + 11 = 0$.

Bestem koordinatsættet til hvert af de punkter hvori banekurvens tangent er parallel med linjen l.

Ligningen for l har formen $Ax + By + C = 0$, hvor

$$A = 8, \qquad B = -1, \qquad C = 11.$$

Konstanterne A og B udgør koordinaterne til en normalvektor til linjen, dvs.

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 8 \\ -1 \end{pmatrix}$$

er en normalvektor til l. Dermed er tværvektoren

$$\hat{\vec{n}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \end{pmatrix}$$

en retningsvektor for linjen l. Nu kan opgaven løses ved at gå frem som i Eksempel 7.7.2.

8. Differentialligninger (Nspire)

8.1 Løs differentialligning

Problem

Du ønsker at bestemme den fuldstændige løsning til en differentialligning.

Løsning

Brug kommandoen **deSolve**, der har formen

deSolve(*DIFFERENTIALLIGNING*, *UAFHÆNGIG VARIABEL*, *AFHÆNGIG VARIABEL*)

y' afhængig variabel

$$\frac{d\boxed{y}}{d\boxed{x}} = x \cdot y^2 \qquad \mathrm{deSolve}(y' = x \cdot y^2, x, y)$$

uafhængig variabel

Eksempel 8.1.1: Bestem fuldstændig løsning til differentialligning
Bestem den fuldstændige løsning til differentialligningen $$\frac{dy}{dx} = x \cdot y^2.$$
Den fuldstændige løsning bestemmes ved hjælp af kommandoen `deSolve`: $$\mathrm{deSolve}(y' = x \cdot y^2, x, y) \blacktriangleright\ y = \frac{-2}{x^2 + 2 \cdot \mathbf{c1}}$$ **(Bemærk: I deSolve skal $\frac{dy}{dx}$ omskrives til y’, altså “y mærke”).** Det ses at den fuldstændige løsning til differentialligningen er $$y = \frac{-2}{x^2 + 2 \cdot c}$$ hvor c er en vilkårlig konstant.

Fejl: For få argumenter (eller argumentfejl)
Når man bruger kommandoen `deSolve`, så skal man efter differentialligningen skrive et komma, og efter kommaet skal man skrive navnet på den uafhængige variabel; herefter skal man skrive endnu et komma efterfulgt af navnet på den afhængige variabel. Hvis man glemmer at gøre dette, så viser programmet en fejlbesked.

8.2 Løs begyndelsesværdiproblem

Problem

Du ønsker at bestemme løsningen til et begyndelsesværdiproblem, dvs. at finde den løsning til en differentialligning hvis graf går gennem et bestemt punkt.

Løsning

Brug kommandoen **`deSolve`**, der har formen

deSolve(*DIFFERENTIALLIGNING* and *BEGYNDELSESBETINGELSE*, *UVAR*, *AVAR*)

hvor *UVAR* og *AVAR* står for navnene på henholdsvis den uafhængige variabel og den afhængige variabel.

Eksempel 8.2.1: Bestem løsning til begyndelsesværdiproblem

En funktion f er en løsning til differentialligningen

$$\frac{dy}{dx} = x \cdot y^2$$

og grafen for f går gennem punktet $P(1{,}5)$. Bestem en forskrift for f.

Forskriften bestemmes ved hjælp af kommandoen `deSolve`:

$$\mathrm{deSolve}(y' = x \cdot y^2 \text{ and } y(1) = 5, x, y) \blacktriangleright\ y = \frac{-10}{5 \cdot x^2 - 7}$$

(Bemærk: I deSolve skal $\frac{dy}{dx}$ omskrives til y', altså "y mærke").

Vi omdøber y til f og konkluderer at f er givet ved

$$f(x) = \frac{-10}{5x^2 - 7}$$

Fejl: For få argumenter (eller argumentfejl)
Når man bruger kommandoen `deSolve`, skal man efter differentialligningen skrive et komma, og efter kommaet skal man skrive navnet på den uafhængige variabel; herefter skal man skrive endnu et komma efterfulgt af navnet på den afhængige variabel. Hvis man glemmer at gøre dette, så viser programmet en fejlbesked.

Eksempel 8.2.2: Bestem løsning til begyndelsesværdiproblem

I en matematisk model kan udviklingen i antallet af rådyr i et bestemt område beskrives ved differentialligningen

$$\frac{dN}{dt} = 0{,}004 \cdot N \cdot (100 - N)$$

hvor N betegner antallet af rådyr i området til tiden t (målt i år). Det oplyses at der fra start er 12 rådyr i området.

Bestem en forskrift for N.

Begyndelsesbetingelsen er her $N(0) = 12$ fordi der fra start (altså efter 0 år) er 12 rådyr i området. Forskriften bestemmes ved hjælp af `deSolve`:

$$\text{deSolve}(n' = 0.004 \cdot n \cdot (100 - n) \text{ and } n(0) = 12, t, n)$$

$$\blacktriangleright\ n = \frac{100. \cdot (1.49182)^t}{(1.49182)^t + 7.33333}$$

Det ses at N er givet ved

$$N(t) = \frac{100 \cdot 1{,}49182^t}{1{,}49182^t + 7{,}33333}$$

8.3 Tegn hældningsfelt

Problem

Du ønsker at tegne et hældningsfelt for en differentialligning.

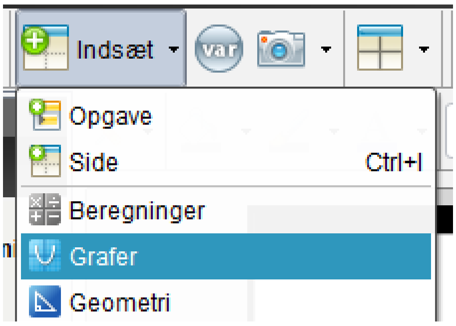
Løsning

I applikationen *Grafer*: Vælg *Grafindtastning/Redigér → Differentialligninger* og indtast så differentialligningen som vist i Eksempel 8.3.1.

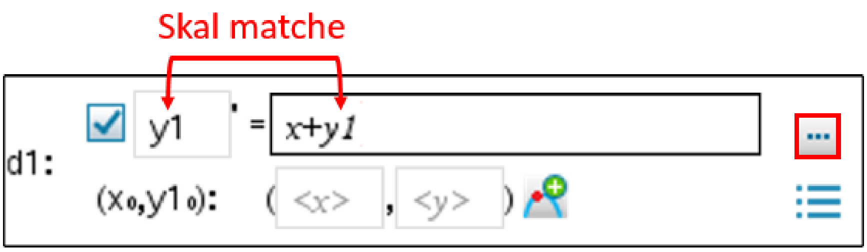
Eksempel 8.3.1: Tegn hældningsfelt

Tegn et hældningsfelt for differentialligningen $\frac{dy}{dt} = t + y$.

1. Tilføj applikationen *Grafer*:



2. Klik på  og vælg *Grafindtastning/Redigér → Differentialligninger*. Indtast herefter differentialligningen som vist nedenfor og tryk ENTER:



Bemærk: Differentialligningen skal omskrives som vist på billedet!

Tip: Feltopløsning
Når man tegner et hældningsfelt i Nspire, så er feltopløsningen som udgangspunkt ret grov. Feltopløsningen kan justeres ved at klikke på knappen med de tre prikker (fremhævet med rødt på skærmbilledet ovenfor).

8.4 Løs begyndelsesværdiproblem numerisk

Problem

Du ønsker at løse et begyndelsesværdiproblem numerisk (via Eulers metode eller Runge-Kutta). Med andre ord: Du ønsker at bruge en numerisk metode til at bestemme punkter på en bestemt løsningskurve.

Løsning

I applikationen *Grafer*: Vælg *Grafindtastning/Redigér* → *Differentialligninger* og indtast så differentialligningen og begyndelsesbetingelsen. Se Eksempel 8.4.1.

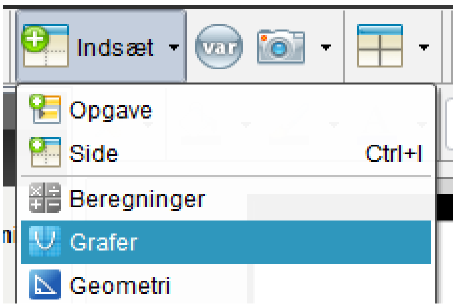
Eksempel 8.4.1: Løs begyndelsesværdiproblem numerisk

Brug en numerisk metode til at tegne grafen for den løsning til differentialligningen

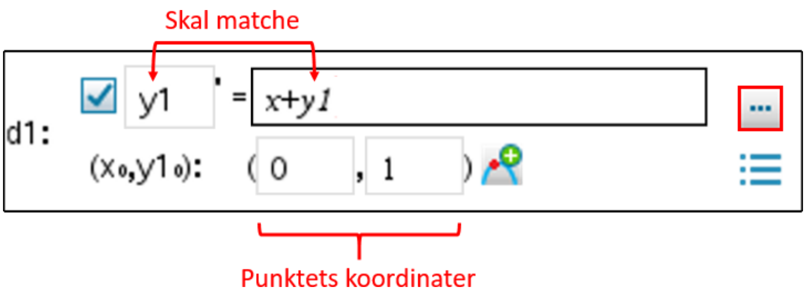
$$\frac{dy}{dt} = t + y$$

hvis graf går gennem punktet $P(0,1)$.

1. Tilføj applikationen *Grafer*:



2. Klik på og vælg *Grafindtastning/Redigér* → *Differentialligninger*. Indtast herefter differentialligningen og punktets koordinater:



(Bemærk at differentialligningen skal omskrives som vist på skærmbilledet). Skridtlængden og den numeriske metode kan justeres ved at klikke på knappen med de tre prikker (fremhævet med rødt på skærmbilledet).

9. Funktioner af to variable (Nspire)

9.1 Definér funktion

Problem

Du ønsker at definere en funktion af to variable således at du kan arbejde med den.

Løsning

Skriv funktionsforskriften (med et kolon foran lighedstegnet!) og tryk så ENTER.

Eksempel 9.1.1: Definér funktion af to variable og bestem funktionsværdi

En funktion f af to variable er givet ved

$$f(x,y) = x^3 + x^2y + y^3.$$

Bestem $f(-1,3)$.

Først defineres funktionen:

$$\mathbf{f}(x,y) := x^3 + x^2 \cdot y + y^3 \blacktriangleright \mathit{Udført}$$

Nu hvor funktionen er defineret, kan man indtaste $f(-1,3)$ for at bestemme denne funktionsværdi:

$$\mathbf{f}(-1,\ 3) \blacktriangleright 29$$

Det ses at $f(-1,3) = 29$.

9.2 Bestem partielt afledede (1. orden)

Problem

Du ønsker at bestemme de partielle afledede (af 1. orden) for en funktion af to variable.

Løsning

Brug matematikskabelonen $\frac{d}{d\square}\square$, der kan tilgås ved at klikke på 📖.

Eksempel 9.2.1: Bestem partielle afledede (af 1. orden)

En funktion f af to variable er givet ved

$$f(x,y) = x^3 + x^2y + y^3.$$

Bestem de partielle afledede $f_x'(x,y)$ og $f_y'(x,y)$.

Først defineres funktionen:

$$\mathbf{f}(x,y) := x^3 + x^2 \cdot y + y^3 \;\blacktriangleright\; \mathit{Udført}$$

Herefter bestemmes de partielle afledede ved hjælp af skabelonen $\frac{d}{d\square}\square$:

$$\frac{d}{dx}\left(\mathbf{f}(x,y)\right) \;\blacktriangleright\; 3 \cdot x^2 + 2 \cdot x \cdot y$$

$$\frac{d}{dy}\left(\mathbf{f}(x,y)\right) \;\blacktriangleright\; 3 \cdot y^2 + x^2$$

Det ses at de partielle afledede med hensyn til henholdsvist x og y er

$$f_x'(x,y) = 3x^2 + 2xy \quad \text{og} \quad f_y'(x,y) = 3y^2 + x^2.$$

Tip: Gem partielt afledt til senere brug
Hvis man gerne vil arbejde videre med en partielt afledt, så er det en god idé at gemme den under et nyt navn, som vist her:

$$\mathbf{fx}(x,y) := \frac{d}{dx}\left(\mathbf{f}(x,y)\right) \;\blacktriangleright\; \mathit{Udført}$$

9.3 Bestem partielt afledede (2. orden)

Problem

Du ønsker at bestemme de partielle afledede af 2. orden for en funktion af to variable.

Løsning

Bestem først de partielle afledede af 1. orden ved at følge Opskrift 9.1, og bestem så hver af disse funktioners partielle afledede af 1. orden.

Eksempel 9.3.1: Bestem partielle afledede af 2. orden

En funktion f af to variable er givet ved

$$f(x,y) = x^3 + x^2y + y^3.$$

Bestem de dobbeltafledede $f''_{xx}(x,y)$ og $f''_{yy}(x,y)$ samt den blandede afledede $f''_{xy}(x,y)$.

Først defineres funktionen:

$$\mathbf{f}(x,y) := x^3 + x^2 \cdot y + y^3 \;\blacktriangleright\; \mathit{Udført}$$

Herefter bestemmes de partielle afledede af 1. orden:

$$\mathbf{fx}(x,y) := \frac{d}{dx}\left(\mathbf{f}(x,y)\right) \;\blacktriangleright\; \mathit{Udført}$$

$$\mathbf{fy}(x,y) := \frac{d}{dy}\left(\mathbf{f}(x,y)\right) \;\blacktriangleright\; \mathit{Udført}$$

Endelig bestemmes de dobbeltafledede og den blandede afledede:

$$\frac{d}{dx}\left(\mathbf{fx}(x,y)\right) \;\blacktriangleright\; 6 \cdot x + 2 \cdot y$$

$$\frac{d}{dy}\left(\mathbf{fy}(x,y)\right) \;\blacktriangleright\; 6 \cdot y$$

$$\frac{d}{dy}\left(\mathbf{fx}(x,y)\right) \;\blacktriangleright\; 2 \cdot x$$

Det ses at

$$f''_{xx}(x,y) = 6x + 2y, \qquad f''_{yy}(x,y) = 6y, \qquad f''_{xy}(x,y) = 2x.$$

9.4 Bestem tangentplan

Problem

Du ønsker at bestemme en ligning for en tangentplan i et bestemt punkt på grafen af en funktion af to variable.

Løsning

Udfyld den generelle ligning for en tangentplan (formel (196) i formelsamlingen):

$$z = z_0 + p \cdot (x - x_0) + q \cdot (y - y_0)$$

hvor punktets koordinatsæt er (x_0, y_0, z_0), og $p = f'_x(x_0, y_0)$, $q = f'_y(x_0, y_0)$.

Eksempel 9.4.1: Bestem ligning for tangentplan

En funktion f af to variable er givet ved

$$f(x, y) = x^2 y - 2x - y.$$

Bestem en ligning for tangentplanen til grafen for f i punktet $P(1{,}2, f(1{,}2))$.

Først defineres funktionen:

$$\mathbf{f}(x, y) := x^2 \cdot y - 2 \cdot x - y \;\blacktriangleright\; \mathit{Udført}$$

Herefter udfyldes den generelle tangentplanligning med $x_0 = 1$ og $y_0 = 2$:

$$\mathbf{x0} := 1 \;\blacktriangleright\; 1$$
$$\mathbf{y0} := 2 \;\blacktriangleright\; 2$$
$$\mathbf{z0} := \mathbf{f}(\mathbf{x0}, \mathbf{y0}) \;\blacktriangleright\; -2$$
$$\mathbf{p} := \frac{d}{dx}\big(\mathbf{f}(x, y)\big)|x = \mathbf{x0} \text{ and } y = \mathbf{y0} \;\blacktriangleright\; 2$$
$$\mathbf{q} := \frac{d}{dy}\big(\mathbf{f}(x, y)\big)|x = \mathbf{x0} \text{ and } y = \mathbf{y0} \;\blacktriangleright\; 0$$
$$z = \mathbf{z0} + \mathbf{p} \cdot (x - \mathbf{x0}) + \mathbf{q} \cdot (y - \mathbf{y0}) \;\blacktriangleright\; \mathrm{z} = 2 \cdot x - 4$$

Det ses at tangentplanen til grafen for f i punktet $P(1{,}2, f(1{,}2))$ er givet ved

$$z = 2x - 4.$$

9.5 Bestem stationære punkter

Problem

Du ønsker at bestemme eventuelle stationære punkter for en funktion af to variable.

Løsning

Bruge `solve` til at løse ligningssystemet $f_x(x,y) = 0$ og $f_y(x,y) = 0$.

Eksempel 9.5.1: Bestem stationære punkter

En funktion f af to variable er givet ved

$$f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy + 1.$$

Bestem eventuelle stationære punkter for f.

Først defineres funktionen:

$$\mathbf{f}(x,y) := x^4 + y^4 - 4 \cdot x \cdot y + 1 \;\blacktriangleright\; \mathit{Udført}$$

(Bemærk: Man bliver nødt til at skrive "$x \cdot y$" i stedet for blot "xy", dvs. man bliver nødt til at skrive det implicitte gangetegn der står mellem x og y, for ellers misforstår Nspire forskriften).

Herefter løses ligningssystemet $f_x'(x,y) = 0$ og $f_y'(x,y) = 0$ (Opskrift 2.2):

$$\text{solve}\left(\frac{d}{dx}\big(\mathbf{f}(x,y)\big) = 0 \text{ and } \frac{d}{dy}\big(\mathbf{f}(x,y)\big) = 0, x, y\right)$$

$$\blacktriangleright\; x = -1 \text{ and } y = -1 \text{ or } x = 0 \text{ and } y = 0 \text{ or } x = 1 \text{ and } y = 1$$

Det ses at f har tre stationære punkter, nemlig $(-1,-1)$, $(0,0)$ og $(1,1)$. (Punkternes z-koordinater kan findes ved at indsætte hvert koordinatsæt i f).

9.6 Bestem art af stationært punkt

Problem

Du kender et stationært punkt (x_0, y_0) for en funktion af to variable $f(x, y)$ og ønsker at bestemme arten af dette stationære punkt, altså undersøge om det er et lokalt maksimum, lokalt minimum eller et saddelpunkt.

Løsning

Bestem tallene

$$r = f''_{xx}(x_0, y_0), \quad s = f''_{xy}(x_0, y_0), \quad t = f''_{yy}(x_0, y_0)$$

ved at bruge Opskrift 9.3. Brug herefter formel (198)-(201) i formelsamlingen:

- Hvis $r \cdot t - s^2 > 0$ og $r < 0$, så er punktet et lokalt maksimum.
- Hvis $r \cdot t - s^2 > 0$ og $r > 0$, så er punktet et lokalt minimum.
- Hvis $r \cdot t - s^2 < 0$, så er punktet et saddelpunkt.
- Hvis $r \cdot t - s^2 = 0$, så er arten af punktet ubestemt.

Eksempel 9.6.1: Bestem art af stationært punkt

En funktion f af to variable er givet ved

$$f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy + 1.$$

Det oplyses at $(0, 0, f(0,0))$ er et stationært punkt for f.

Bestem arten af dette stationære punkt.

1. Definér først funktionen (Opskrift 9.1):

$$\mathbf{f}(x, y) := x^4 + y^4 - 4 \cdot x \cdot y + 1 \ \blacktriangleright \ \mathit{Udført}$$

(Bemærk: Man bliver nødt til at skrive "$x \cdot y$" i stedet for blot "xy", dvs. man bliver nødt til at skrive det implicitte gangetegn der står mellem x og y, for ellers misforstår Nspire forskriften).

2. Bestem de partielle afledede af 1. orden (Opskrift 9.2):

$$\mathbf{fx}(x, y) := \frac{d}{dx}(\mathbf{f}(x, y)) \ \blacktriangleright \ \mathit{Udført}$$

$$\mathbf{fy}(x, y) := \frac{d}{dy}(\mathbf{f}(x, y)) \ \blacktriangleright \ \mathit{Udført}$$

3. Bestem de partielle afledede af 2. orden (Opskrift 9.3):

$$\mathbf{fxx}(x,y) := \frac{d}{dx}\left(\mathbf{fx}(x,y)\right) \blacktriangleright \textit{Udført}$$

$$\mathbf{fxy}(x,y) := \frac{d}{dy}\left(\mathbf{fx}(x,y)\right) \blacktriangleright \textit{Udført}$$

$$\mathbf{fyy}(x,y) := \frac{d}{dy}\left(\mathbf{fy}(x,y)\right) \blacktriangleright \textit{Udført}$$

4. Bestem tallene

$$r = f''_{xx}(x_0, y_0), \qquad s = f''_{xy}(x_0, y_0), \qquad t = f''_{yy}(x_0, y_0)$$

hvor x_0 og y_0 betegner hhv. x- og y-koordinaten til det stationære punkt.
I dette eksempel undersøges punktet $(0, 0, f(0,0))$, så $x_0 = 0$ og $y_0 = 0$.

$$\mathbf{r} := \mathbf{fxx}(0,0) \blacktriangleright 0$$
$$\mathbf{s} := \mathbf{fxy}(0,0) \blacktriangleright -4$$
$$\mathbf{t} := \mathbf{fyy}(0,0) \blacktriangleright 0$$

5. Bestem tallet $r \cdot t - s^2$.

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{t} - \mathbf{s}^2 \blacktriangleright -16$$

6. Brug nu formel (198)-(201) i formelsamlingen til at drage en konklusion:
I dette eksempel er $r \cdot t - s^2 < 0$, så vi kan konkludere at punktet er et saddelpunkt.

9.7 Tegn graf for funktion af to variable

Problem

Du ønsker at tegne grafen for en funktion af to variable.

Løsning

Tilføj applikationen *Grafer*, klik på , vælg *Vis* → *3D-graftegning* og indtast så funktionsforskriften.

Eksempel 9.7.1: Tegn graf for funktion af to variable

En funktion f af to variable er givet ved

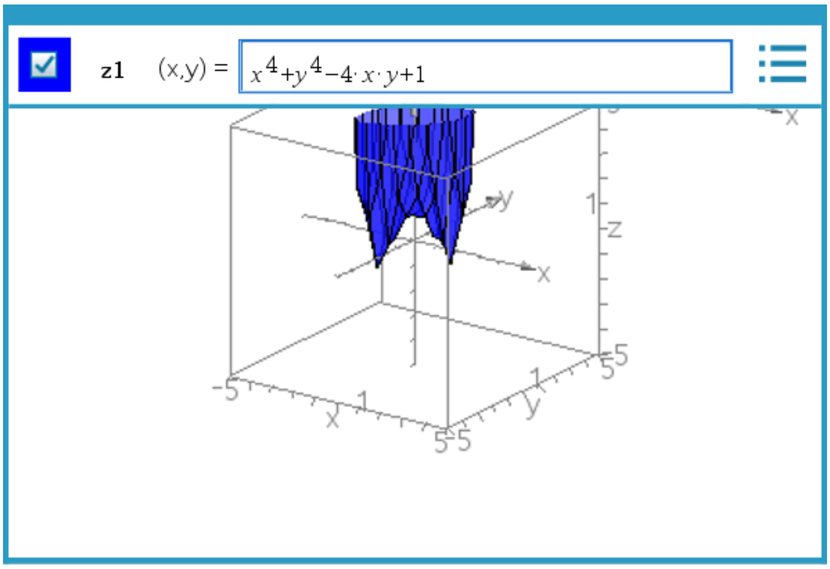
$$f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy + 1.$$

Tegn grafen for funktionen.

1. Tilføj applikationen *Grafer* ved at klikke på

Indsæt → *Grafer*

2. I *Grafer*: Klik på , vælg *Vis* → *3D-graftegning* og indtast så forskriften:



3. Indstil evt. akserne ved at klikke på og vælge *Område/zoom* → *Områdeindstillinger* og efterfølgende på *Område/zoom* → *Højde/breddeforhold*.

Tip: Finkornet graf
Som udgangspunkt kan grafen godt fremstå grovkornet. Ved at højreklikke på grafen og vælge *Attributter* kan man gøre graftegningen mere finkornet: Dette opnås ved at indtaste en højere værdi i hver af de firkanter der vises i menuen som dukker op.

9.8 Bestem gradient

Problem

Du ønsker at bestemme en gradient for en funktion af to variable.

Løsning

Gradienten for en funktion $f(x, y)$ af to variable er givet ved

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} f_x'(x,y) \\ f_y'(x,y) \end{pmatrix}$$

(se formel (195) i formelsamlingen). Man skal altså bestemme de partielle afledede af 1. orden, jf. Opskrift 9.2.

Eksempel 9.8.1: Bestem gradient

En funktion f af to variable er givet ved

$$f(x,y) = x^2 y - 2x - y.$$

a) Bestem gradienten $\nabla f(x,y)$.
b) Bestem $\nabla f(1,2)$, altså gradienten for f når $x = 1$ og $y = 2$.

Først defineres funktionen:

$$\mathbf{f}(x,y) := x^2 \cdot y - 2 \cdot x - y \;\blacktriangleright\; \mathit{Udført}$$

a) Gradienten er vektoren bestående af de partielle afledede af 1. orden:

$$\mathbf{gradf}(x,y) := \left[\frac{d}{dx}\big(\mathbf{f}(x,y)\big)\;;\;\frac{d}{dy}\big(\mathbf{f}(x,y)\big)\right] \;\blacktriangleright\; \mathit{Udført}$$

$$\mathbf{gradf}(x,y) \;\blacktriangleright\; \begin{bmatrix} 2\cdot x\cdot y-2 \\ x^2-1 \end{bmatrix}$$

Gradienten er altså

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 2xy - 2 \\ x^2 - 1 \end{pmatrix}$$

b) Gradienten $\nabla f(1,2)$ bestemmes ved at indsætte $x = 1$ og $y = 2$:

$$\mathbf{gradf}(1,2) \;\blacktriangleright\; \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Gradienten for f når $x = 1$ og $y = 2$ er altså

$$\nabla f(1,2) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

9.9 Tegn graf for funktion af to variable (GeoGebra)

Problem

Du ønsker at tegne grafen for en funktion af to variable i GeoGebra.

Løsning

I GeoGebra: Åbn vinduet *3D Grafik*:

Indtast derefter funktionens forskrift i inputlinjen.

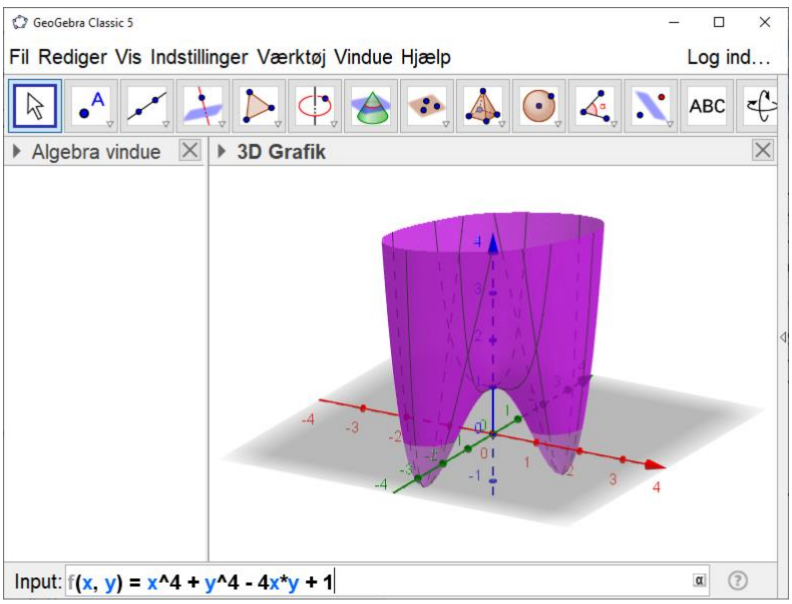
Eksempel 9.9.1: Tegn graf for funktion af to variable (GeoGebra)

En funktion f af to variable er givet ved

$$f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy + 1.$$

Tegn grafen for funktionen sammen med punktet $P(1, 1, f(1, 1))$.

Åbn vinduet *3D Grafik* som vist ovenfor, og indtast så funktionsforskriften i inputlinjen.



Indtast herefter punktet i inputlinjen: `P = (1, 1, f(1, 1))`

10. Ugrupperet data (Nspire/WordMat)

10.1 Bestem frekvenser

Problem

Du ønsker at bestemme frekvenserne for et ugrupperet datasæt.

Løsning

Brug applikationen *Lister og Regneark* som vist i Eksempel 10.1.1.

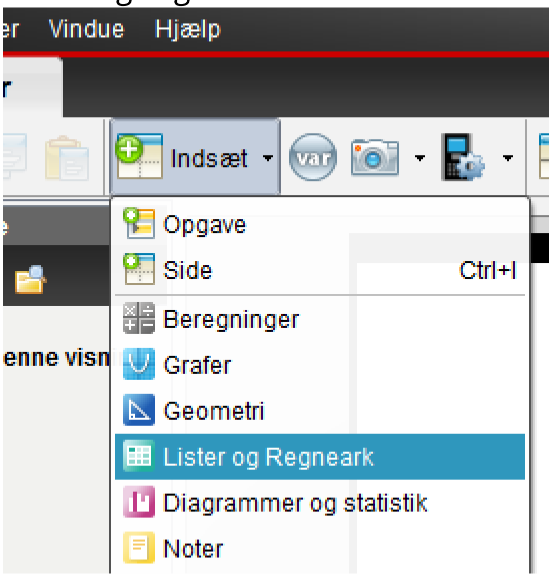
Eksempel 10.1.1: Bestem frekvenser for ugrupperet datasæt

Tabellen viser karakterfordelingen for en årgang på en lille skole:

Karakter	-3	00	02	4	7	10	12
Hyppighed	0	0	2	12	15	15	6

Bestem frekvensen for hver karakter.

1. Tilføj applikationen *Lister og Regneark*:



2. Navngiv de tre første søjler i regnearket hhv. **karakter**, **hyppighed** og **frekvens** ved at dobbeltklikke på den øverste (grå) celle i hver søjle. Indtast derefter dataene fra tabellen:

	A karakter	B hyppig...	C frekvens
=			
1	-3	0	
2	0	0	
3	2	2	
4	4	12	
5	7	15	
6	10	15	
7	12	6	

3. Udregn nu frekvenserne ved at dobbeltklikke i den grå celle under overskriften **frekvens** og indtaste **`hyppighed/sum(hyppighed)`**.

Tip: Decimaltal i stedet for brøker
Hvis du gerne vil have frekvenserne vist som decimaltal i stedet for brøker, så dobbeltklik på teksten *Indstillinger* nederst i Nspire-vinduet og vælg *Beregningstilstand* → *Tilnærmet*.

10.2 Bestem kumulerede frekvenser

Problem

Du ønsker at bestemme de kumulerede frekvenser for et ugrupperet datasæt.

Løsning

Bestem først frekvenserne som vist i Opskrift 10.1. Navngiv så den fjerde søjle i regnearket **kum_frek**. Dobbeltklik herefter i den grå celle under søjleoverskriften og indtast **`cumulativesum(frekvens)`**.

	A karakter	B hyppighed	C frekvens	D kum_frek
=			=hyppighed	=cumulativesum(frekvens)
1	-3.	0.	0.	0.
2	0.	0.	0.	0.
3	2.	2.	0.04	0.04
4	4.	12.	0.24	0.28
5	7.	15.	0.3	0.58
6	10.	15.	0.3	0.88
7	12.	6.	0.12	1.

Den fremhævede del af skærmbilledet viser de kumulerede frekvenser.

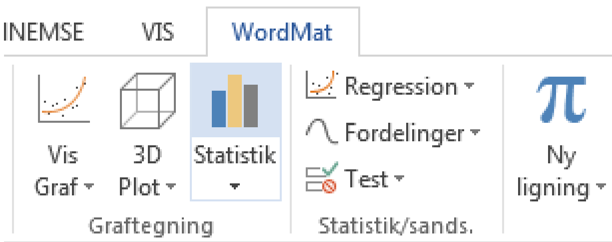
10.3 WordMat og ugrupperet data

Problem

Du har et ugrupperet datasæt og ønsker at bestemme kumulerede frekvenser, tegne trappediagram og/eller bestemme kvartilsæt.

Løsning

Brug knappen *Statistik* i WordMat:



Se Eksempel 10.3.1.

Eksempel 10-2: Behandl ugrupperet data med WordMat

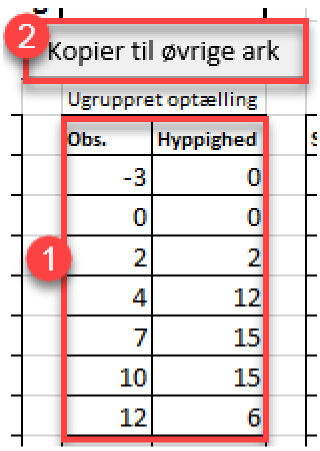
Tabellen viser karakterfordelingen for en årgang på en lille skole:

Karakter	-3	00	02	4	7	10	12
Hyppighed	0	0	2	12	15	15	6

Bestem de kumulerede frekvenser, bestem kvartilsæt og tegn et trappediagram.

1. I Word: Klik på knappen *Statistik* under fanen WordMat (se ovenfor). Dette åbner en Excel-fil. (Klik på Excel-ikonet i din programliste hvis Excel-filen ikke automatisk bliver bragt til forgrunden. Hvis der kommer en dialogboks om **Makroer**, så skal du vælge **Med makroer**).

2. I Excel-filen er der en tabel med to søjler, der er navngivet **obs** og **hyppighed**. Indtast dataene fra opgaveformuleringen og tryk så på knappen *Kopier til øvrige ark*:



3. Klik nu på fanen **Ugrup** i bunden af Excel-filen; så får du frekvenser, kumulerede frekvenser, kvartilsæt, trappediagram mm.

11. Grupperet data (Nspire/WordMat)

11.1 Bestem frekvenser

Problem

Du ønsker at bestemme frekvenserne for et grupperet datasæt.

Løsning

Brug applikationen *Lister og Regneark* som vist i Eksempel 11.1.1.

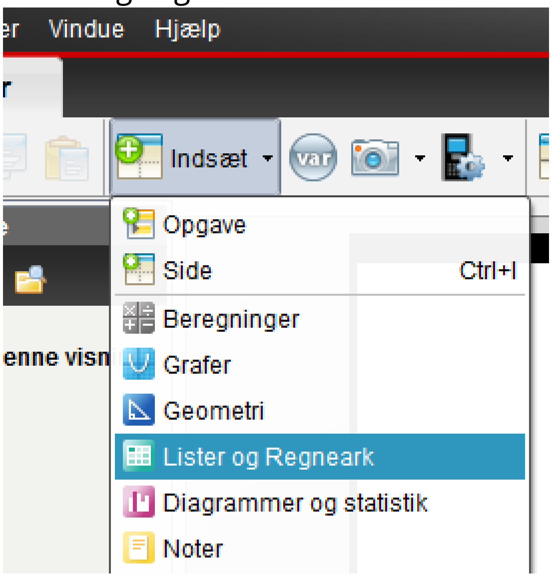
Eksempel 11.1.1: Bestem frekvenser for grupperet datasæt

Tabellen viser fordelingen af løbetiderne i et 10-kilometers løb

Løbetid (min)	30-35	35-40	40-45	45-50	50-55
Antal løbere	27	39	54	21	9

Bestem frekvensen for hvert interval.

1. Tilføj applikationen *Lister og Regneark*:



2. Navngiv de fire første søjler i regnearket hhv. **nedre**, **øvre**, **hyppighed** og **frekvens** ved at dobbeltklikke på den øverste (grå) celle i hver søjle. Indtast derefter dataene fra tabellen som vist:

	A nedre	B øvre	C hyppighed	D frekvens
=				
1	30	35	27	
2	35	40	39	
3	40	45	54	
4	45	50	21	
5	50	55	9	

3. Udregn nu frekvenserne ved at dobbeltklikke i den grå celle under overskriften **frekvens** og indtaste **`hyppighed/sum(hyppighed)`**.

Tip: Decimaltal i stedet for brøker
Hvis du gerne vil have frekvenserne vist som decimaltal i stedet for brøker, så dobbeltklik på teksten *Indstillinger* nederst i Nspire-vinduet og vælg *Beregningstilstand* → *Tilnærmet*.

11.2 Bestem kumulerede frekvenser

Problem

Du ønsker at bestemme kumulerede frekvenserne for et grupperet datasæt.

Løsning

Brug applikationen *Lister og Regneark* som vist i Eksempel 11.2.1.

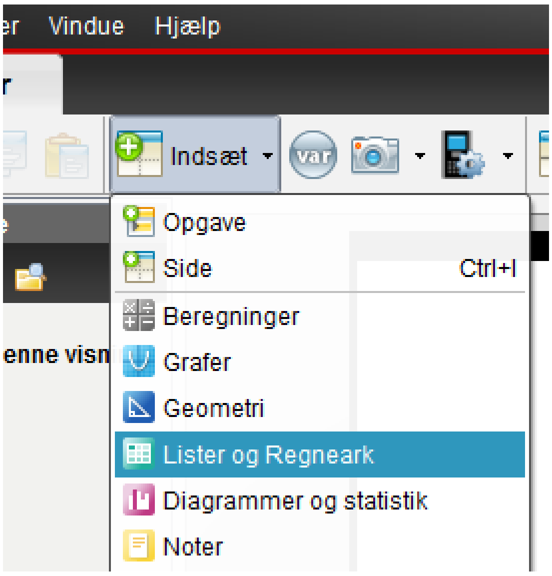
Eksempel 11.2.1: Bestem kumulerede frekvenser for grupperet datasæt

Tabellen viser fordelingen af løbetiderne i et 10-kilometers løb

Løbetid (min)	30-35	35-40	40-45	45-50	50-55
Antal løbere	27	39	54	21	9

Bestem de kumulerede frekvenser.

1. Tilføj applikationen *Lister og Regneark*:



2. Navngiv de fem første søjler i regnearket hhv. **nedre**, **øvre**, **hyppighed**, **frekvens** og **kumuleret** ved at dobbeltklikke på den øverste (grå) celle i hver søjle. Indtast derefter dataene fra tabellen som vist:

	A nedre	B øvre	C hyppighed	D frekvens	E kumuleret
=					
1	30	35	27		
2	35	40	39		
3	40	45	54		
4	45	50	21		
5	50	55	9		

3. Udregn nu frekvenserne ved at dobbeltklikke i den grå celle under overskriften **frekvens** og indtaste `hyppighed/sum(hyppighed)`.

4. Udregn derefter de kumulerede frekvenser ved at dobbeltklikke i den grå celle under overskriften **kumuleret** og indtaste `cumulativesum(frekvens)`.

	A nedre	B øvre	C hyppighed	D frekvens	E kumuleret
=				=hyppighec	=cumulatives
1	30.	35.	27.	0.18	0.18
2	35.	40.	39.	0.26	0.44
3	40.	45.	54.	0.36	0.8
4	45.	50.	21.	0.14	0.94
5	50.	55.	9.	0.06	1.

De kumulerede frekvenser kan nu ses i søjle E (den med overskriften **kumuleret**).

Tip: Decimaltal i stedet for brøker
Hvis du gerne vil have frekvenserne vist som decimaltal i stedet for brøker, så dobbeltklik på teksten *Indstillinger* nederst i Nspire-vinduet og vælg *Beregningstilstand* → *Tilnærmet*.

11.3 Tegn sumkurve

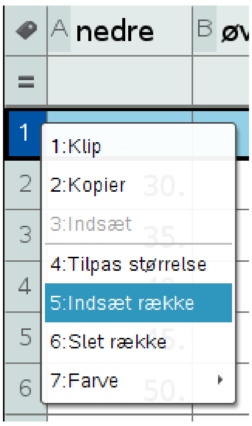
Problem

Du ønsker at tegne en sumkurve for et grupperet datasæt.

Løsning

1. Bestem de kumulerede frekvenser ved at følge [Opskrift 11.2](#).

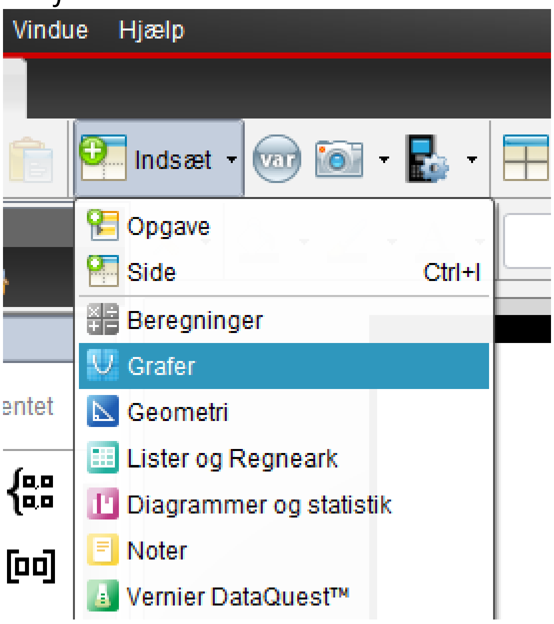
2. Tilføj en række øverst i regnearket ved at højreklikke på det grå 1-tal i venstre margen af regnearket og vælge *Indsæt række*:



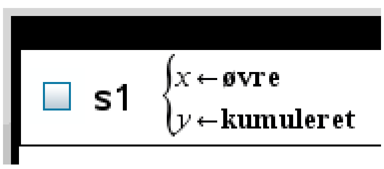
3. I den nye række: Under **øvre** skal du angive det *nedre* endepunkt for det første interval, og under **hyppighed** skal du angive 0. Du behøver ikke at udfylde de andre celler i denne række. Dit regneark burde nu se nogenlunde således ud:

	A nedre	B øvre	C hyppighed	D frekvens	E kumuleret
=				=hyppighed	=cumulatives
1		30.	0.	0.	0.
2	30.	35.	27.	0.18	0.18
3	35.	40.	39.	0.26	0.44
4	40.	45.	54.	0.36	0.8
5	45.	50.	21.	0.14	0.94
6	50.	55.	9.	0.06	1.

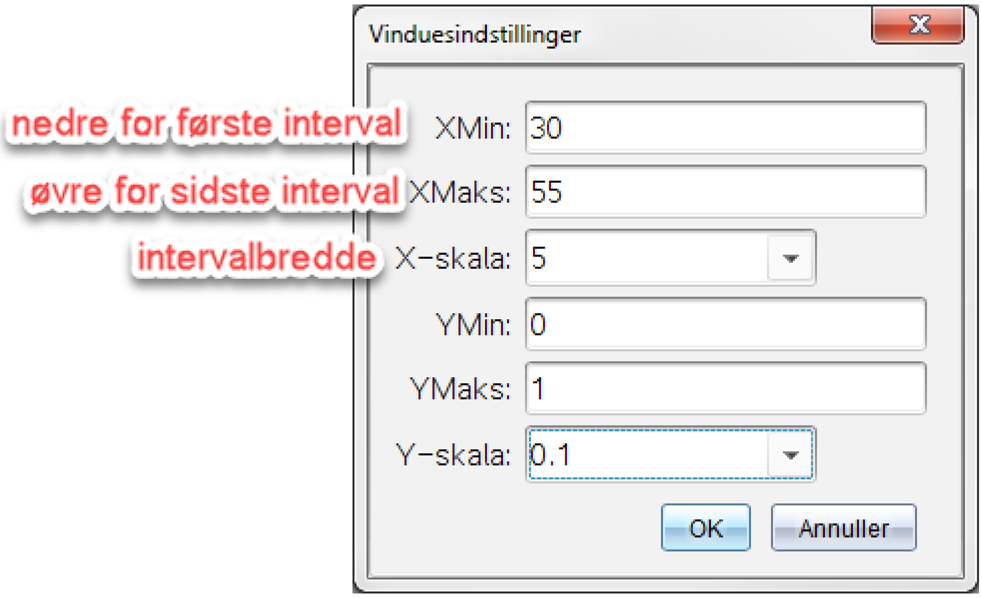
4. Tilføj applikationen *Grafer*:



5. I applikationen *Grafer*: Klik på og vælg *Grafindtastning/Redigér* → *Punktplot*. Sæt *x*-værdierne til at være de øvre intervalendepunkter og *y*-værdierne til at være de kumulerede frekvenser:

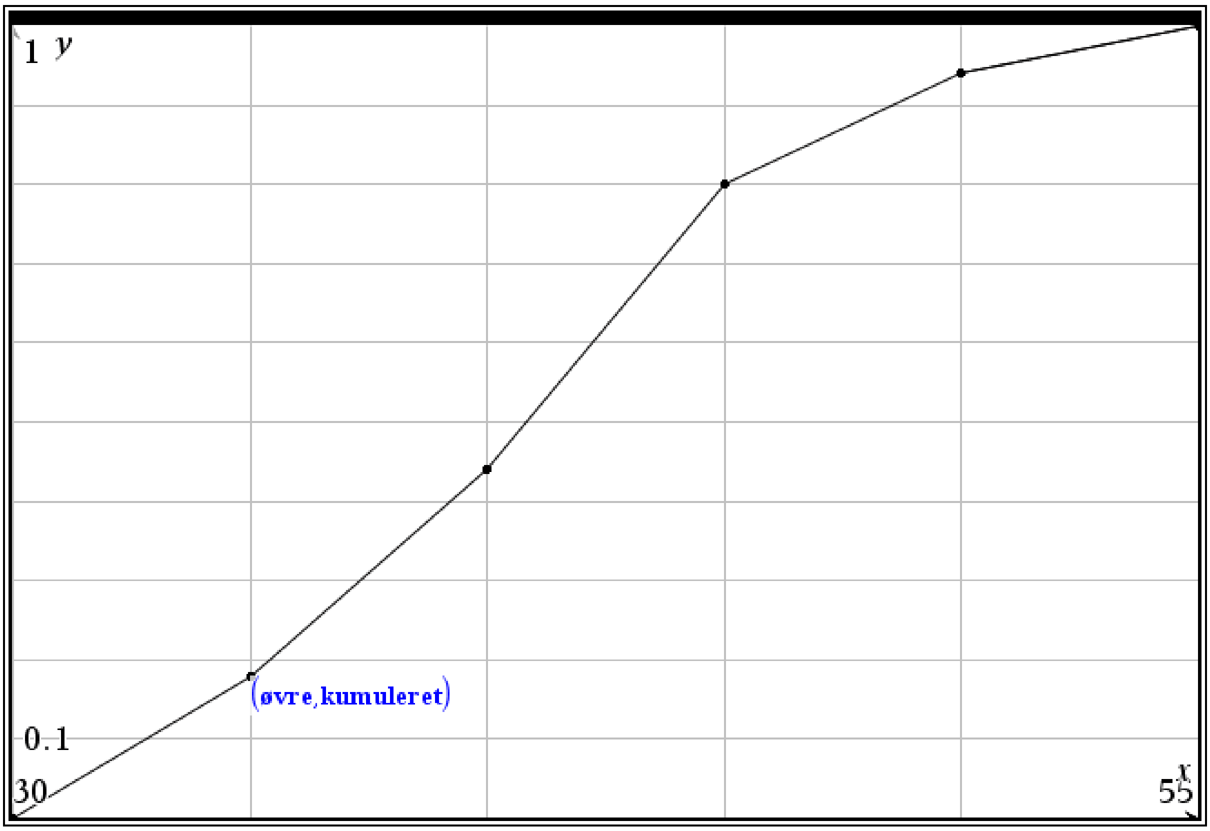


6. Indstil nu grafvinduet ved at klikke på 🛠 og vælge *Vindue/Zoom → Indstillinger for vindue*:



7. For overskuelighed: Slå gitterlinjer til ved at klikke på 🛠 og vælge *Vis → Gitter → Linjegitter*.

8. Til sidst: Klik på 🛠 og vælg *Geometri → Punkter og linjer → Linjestykke*. Brug dette værktøj til at forbinde de indtegnede punkter:



11.4 Bestem kvartilsæt

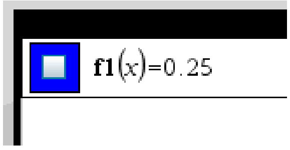
Problem

Du ønsker at bestemme kvartilsæt for et grupperet datasæt.

Løsning

1. Tegn sumkurven for datasættet ved at følge Opskrift 11.3.

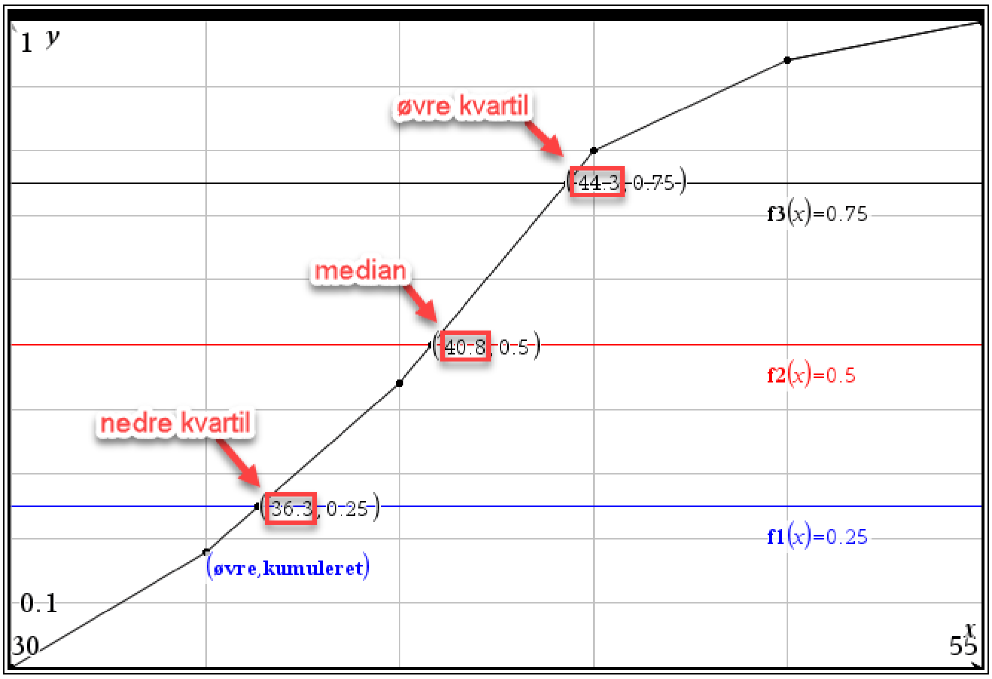
2. I applikationen *Grafer*: Indtegn grafen for den konstante funktion $f_1(x) = 0{,}25$ ved at klikke på og vælge *Grafindtastning/Redigér* → *Funktion*:



Indtegn på tilsvarende vis grafen for $f_2(x) = 0{,}50$ og for $f_3(x) = 0{,}75$.

3. Bestem skæringspunkterne mellem sumkurven og de vandrette linjer fra forrige trin ved at klikke på og vælge *Geometri* → *Punkter og linjer* → *Skæringspunkt(er)*. (Når værktøjet er valgt, skal man klikke på de to objekter som man vil finde skæringspunkt mellem.)

4. Højreklik på hvert af skæringspunkterne og vælg *Koordinater og ligninger*: *x*-koordinaterne til disse skæringspunkter er datasættets kvartilsæt:



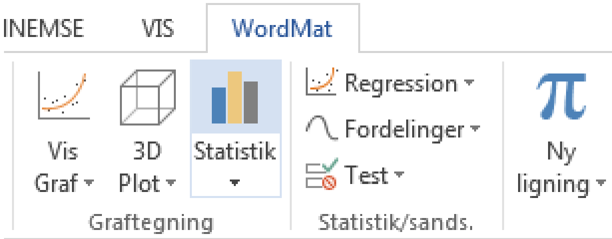
11.5 WordMat og grupperet data

Problem

Du har et grupperet datasæt og ønsker at bestemme kumulerede frekvenser, tegne sumkurve og/eller bestemme kvartilsæt.

Løsning

Brug knappen *Statistik* i WordMat:



Se Eksempel 11.5.1.

Eksempel 11.5.1: Behandl grupperet data med WordMat

Tabellen viser fordelingen af løbetiderne i et 10-kilometers løb

Løbetid (min)	30-35	35-40	40-45	45-50	50-55
Antal løbere	27	39	54	21	9

Bestem de kumulerede frekvenser, tegn en sumkurve og bestem kvartilsæt.

1. I Word: Klik på knappen *Statistik* under fanen WordMat (se ovenfor). Dette åbner en Excel-fil. (Klik på Excel-ikonet i din programliste hvis Excel-filen ikke automatisk bliver bragt til forgrunden. Hvis der kommer en dialogboks om **Makroer**, så skal du vælge **Med makroer**).

2. I Excel-filen er der en tabel med tre søjler, der er navngivet **start**, **slut** og **hyppighed**. Indtast dataene fra opgaveformuleringen og tryk så på knappen *Kopier til øvrige ark*:

2 Kopier til øvrige ark

1

Rå data	Ugrupperet optælling				
Obs.	Obs.	Hyppighed	Start	Slut	Hyppighed
			30	35	27
			35	40	39
			40	45	54
			45	50	21
			50	55	9

3. Klik nu på fanen **Grup** i bunden af Excel-filen; så får du frekvenser, kumulerede frekvenser, kvartilsæt, sumkurve m.m.

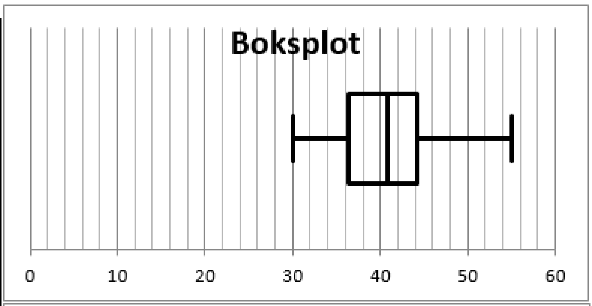
Grupperede observationer

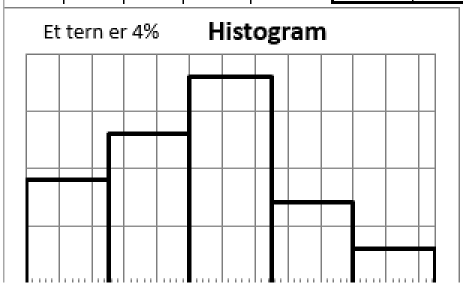
Interval

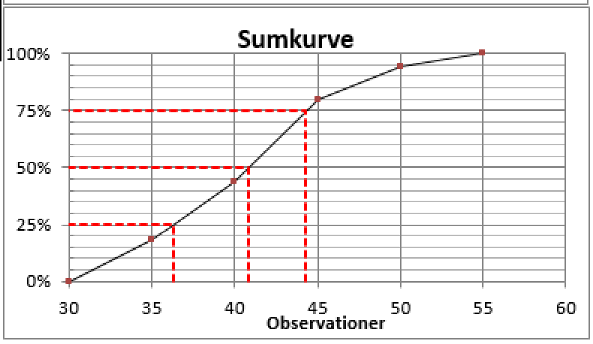
Fra	Til	Hyp.	Frekvens	Kum. Frekv
30	35	27	18%	18%
35	40	39	26%	44%
40	45	54	36%	80%
45	50	21	14%	94%
50	55	9	6%	100%

Deskriptorer

Kvartilsæt	
Mindste	30
Nedre	36,35
Median	40,83
Øvre	44,31
Største	55
Observatior Fraktil	
Middeltal	40,7
Spredning	5,546







12. Binomialfordelingen (GeoGebra/Nspire)

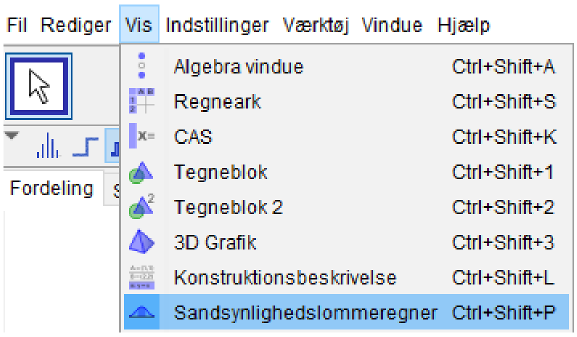
12.1 Bestem binomialsandsynligheder

Problem

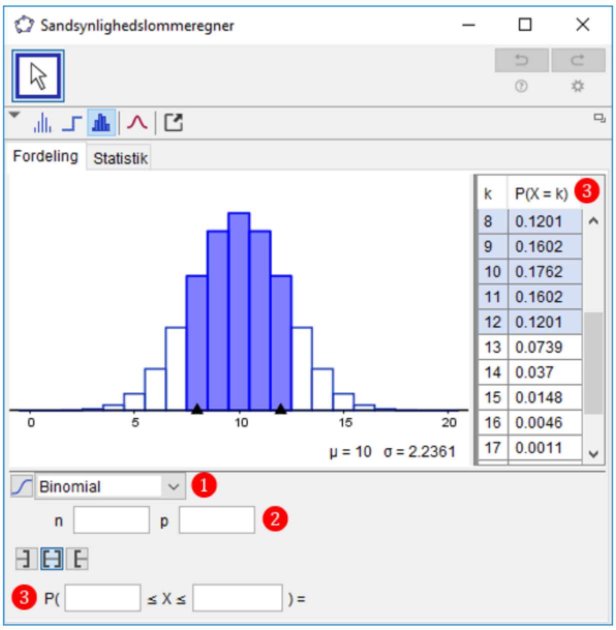
Du kender antalsparameteren og sandsynlighedsparameteren for en binomialmodel og ønsker at udregne sandsynligheden for at få et bestemt antal succeser.

Løsning

Åbn sandsynlighedslommeregneren i GeoGebra:



Vælg *Binomial* fra dropdown-menuen (1), indtast antalsparameteren *n* og sandsynlighedsparameteren *p* (2) og brug så tabellen i højre side eller områdevælgeren nederst i vinduet (3). Se eksemplerne nedenfor.



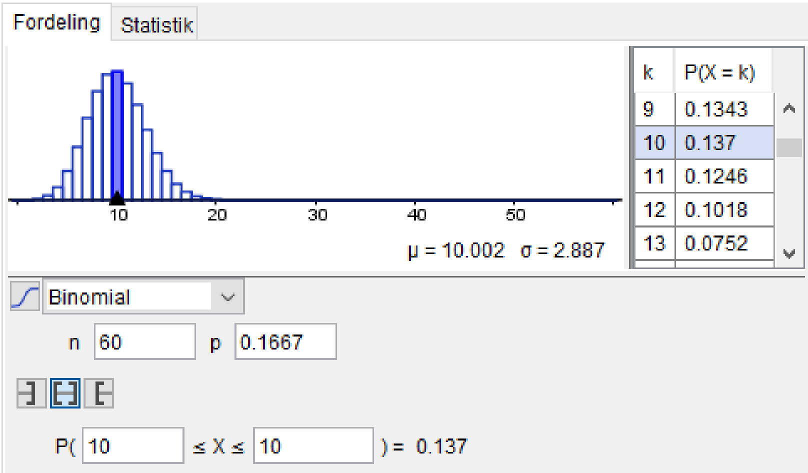
Eksempel 12.1.1: Bestem punktsandsynlighed

En ærlig sekssidet terning kastes 60 gange.

Bestem sandsynligheden for at den viser ⚅ i netop 10 af kastene.

Der er tale om et binomialeksperiment, hvor "succes" er at terningen viser ⚅, og "fiasko" er at den viser noget andet.

Antalsparameteren er $n = 60$, og sandsynlighedsparameteren er $p = \frac{1}{6}$. Dette indtastes i GeoGebras sandsynlighedslommeregner:



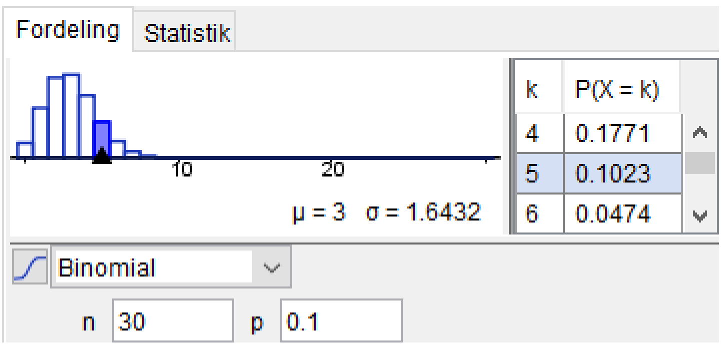
Fra tabellen i højre side af vinduet kan man aflæse at sandsynligheden for at få netop 10 succeser er 0,137 altså 13,7%.

Eksempel 12.1.2: Bestem punktsandsynlighed

En stokastisk variabel X er binomialfordelt, $X \sim b(30, 0.1)$.

Bestem $P(X = 5)$.

Parametrene indtastes i sandsynlighedslommeregneren:



Fra tabellen i højre side kan man aflæse at $P(X = 5) = 0{,}1023$ altså 10,23%.

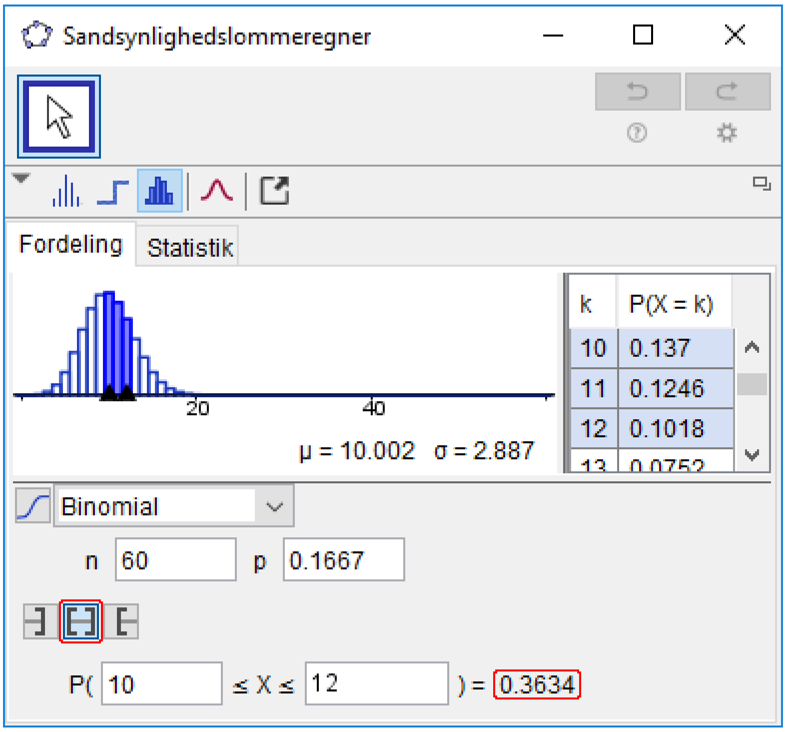
Eksempel 12.1.3: Bestem intervalsandsynlighed

En ærlig sekssidet terning kastes 60 gange.

Bestem sandsynligheden for at den viser ⚅ i 10, 11 eller 12 af kastene.

Der er tale om et binomialeksperiment, hvor "succes" er at terningen viser ⚅, og "fiasko" er at den viser noget andet.

Antalsparameteren er $n = 60$, og sandsynlighedsparameteren er $p = \frac{1}{6}$. Dette indtastes i GeoGebras sandsynlighedslommeregner og så vælges intervallet $10 \leq X \leq 12$:

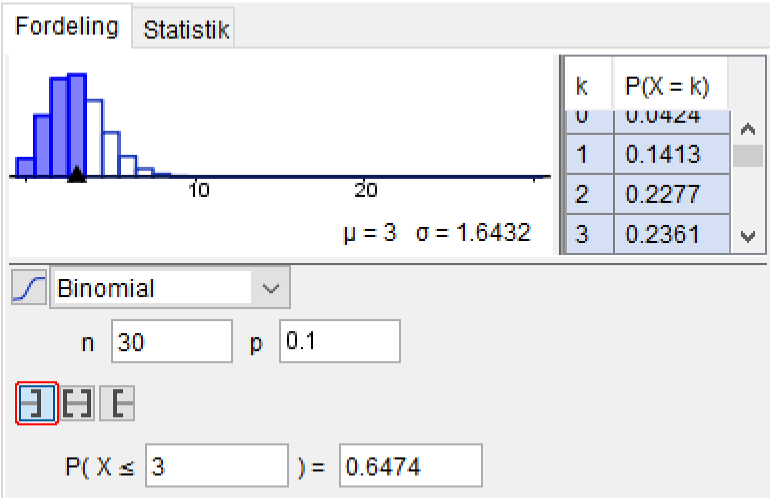


Sandsynligheden for at få 10, 11 eller 12 succeser ses at være 0,3634 altså 36,34%.

Eksempel 12.1.4: Bestem intervalsandsynlighed

En stokastisk variabel X er binomialfordelt, $X \sim b(30, 0.1)$. Bestem $P(X \leq 3)$.

Parametrene indtastes i sandsynlighedslommeregneren og så bruges værktøjet *Venstresidet* (fremhævet med rødt):



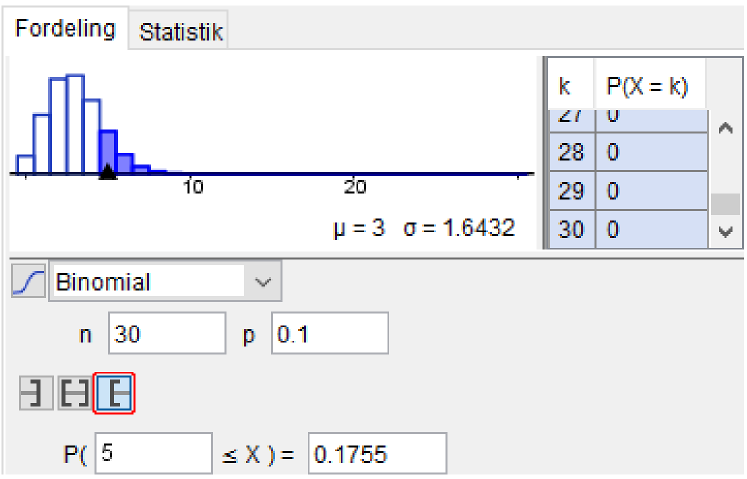
Det ses at $P(X \leq 3) = 0{,}6474$ altså 64,74%.

Eksempel 12.1.5: Bestem intervalsandsynlighed

En stokastisk variabel X er binomialfordelt med antalsparameter 30 og sandsynlighedsparameter 0,1.

Bestem $P(X \geq 5)$.

Parametrene indtastes i sandsynlighedslommeregneren og så bruges værktøjet *Højresidet* (fremhævet med rødt):



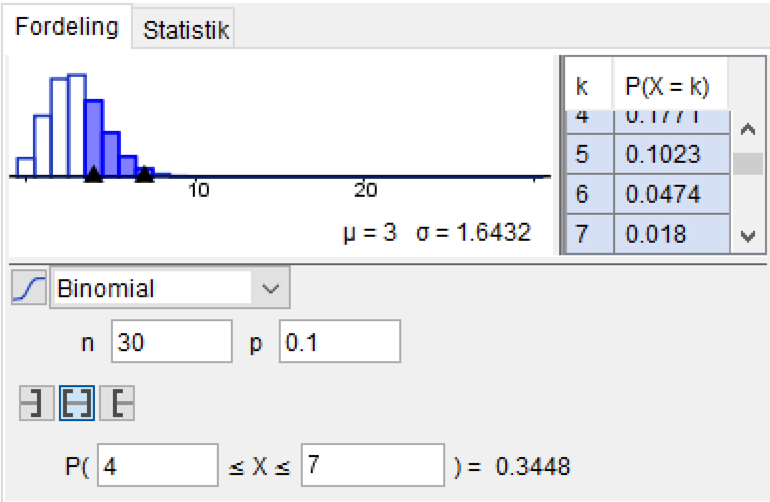
Det ses at $P(X \geq 5) = 0{,}1755$ altså 17,55%.

Eksempel 12.1.6: Bestem intervalsandsynlighed

En stokastisk variabel X er binomialfordelt med antalsparameter 30 og sandsynlighedsparameter 0,1.

Bestem $P(4 \leq X \leq 7)$.

Parametrene indtastes i sandsynlighedslommeregneren og så vælges intervallet $4 \leq X \leq 7$:



Det ses at $P(4 \leq X \leq 7) = 0{,}3448$ altså 34,48%.

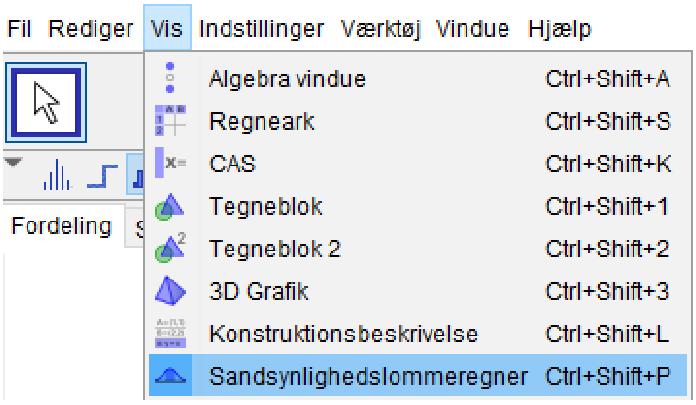
12.2 Udfør binomialtest

Problem

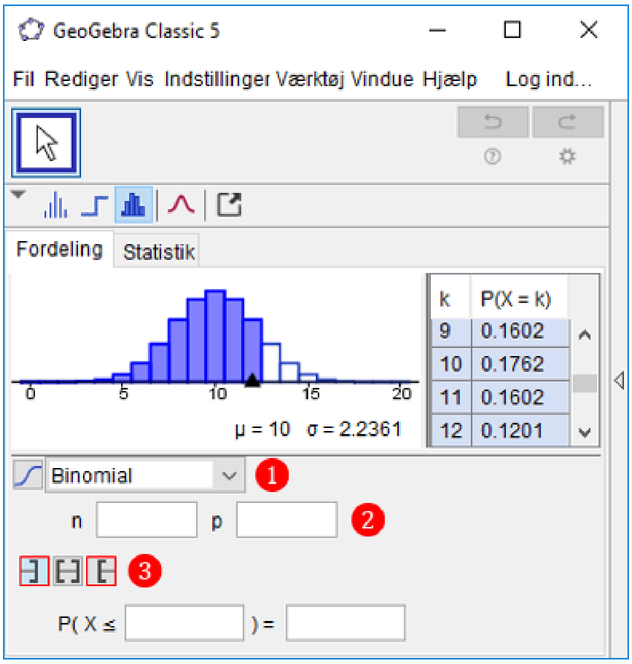
Du ønsker at udføre et enkeltsidet eller tosidet binomialtest.

Løsning

Åbn sandsynlighedslommeregneren i GeoGebra:



Vælg *Binomial* fra dropdown-menuen (1), indtast sandsynlighedsparameteren p fra nulhypotsen samt antalsparameteren n (2) og bestem så den kritiske mængde vha. den venstresidede og/eller højresidede områdevælger (3).



Se Eksempel 12.2.1 (venstresidet), 12.2.2 (højresidet) og 12.2.3 (tosidet).

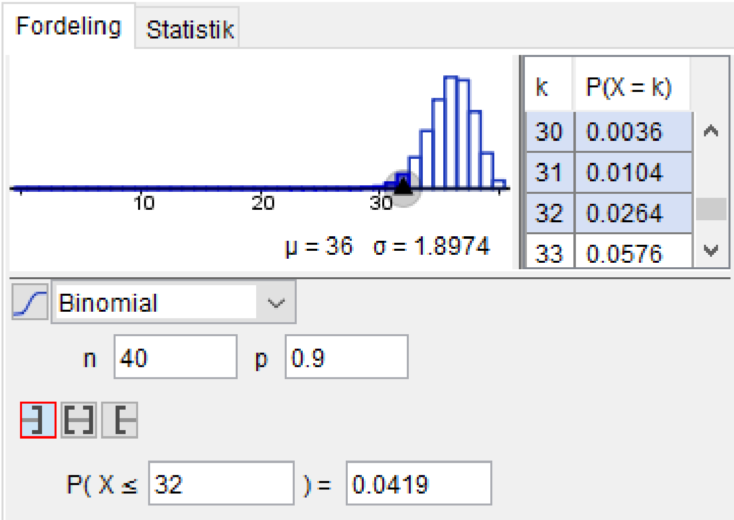
Eksempel 12.2.1: Venstresidet binomialtest

Et supermarked bestiller tomater fra en leverandør der lover at mindst 90% af alle tomaterne er ufordærvede når de når frem til supermarkedet. Supermarkedets medarbejdere udtager en tilfældig stikprøve på 40 tomater fra en ny stor forsendelse og konstaterer at kun 29 af dem er ufordærvede.

Udfør et venstresidet binomialtest på signifikansniveau 5% af nulhypotesen

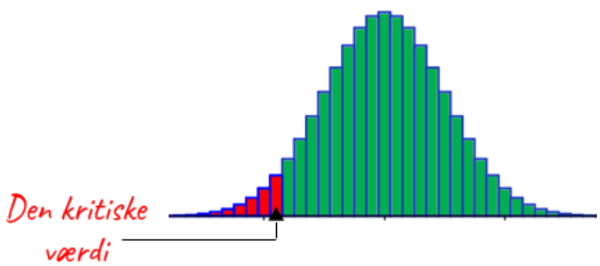
$$H_0\text{: } \textit{90\% af tomaterne er ufordærvede}.$$

Antalsparameteren $n = 40$ og sandsynlighedsparameteren $p = 0{,}90$ indtastes i sandsynlighedslommeregneren, og så bruges værktøjet *Venstresidet* til at finde det største tal k der opfylder at $P(X \leq k) < 5\%$:



Heraf fremgår det at den kritiske mængde er $\{0, 1, 2, \ldots, 32\}$. Det observerede udfald på 29 ligger i den kritiske mængde; så nulhypotesen kan forkastes.

Tip: Venstresidet binomialtest
Hvis signifikansniveauet i stedet havde været på fx 1% i eksemplet ovenfor, så havde man i stedet skulle finde det største tal k der opfylder at $P(X \leq k) < 1\%$ ("den kritiske værdi").



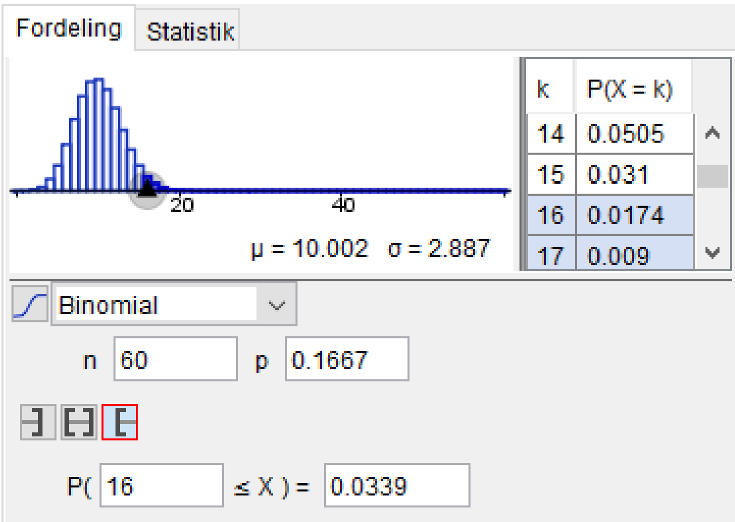
Eksempel 12.2.2: Højresidet binomialtest

En 6-sidet terning mistænkes for at favorisere udfaldet ⚄. Terningen kastes 60 gange og viser ⚄ i 15 af kastene.

Udfør et højresidet binomialtest på signifikansniveau 5% af nulhypotesen

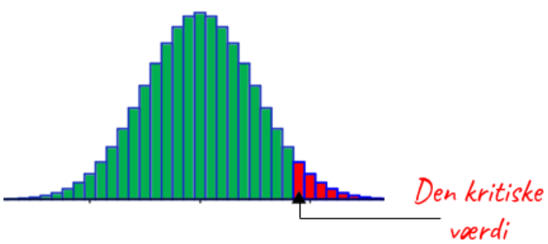
$$H_0\text{: } \textit{Sandsynligheden for at terningen viser ⚄ er } \tfrac{1}{6}.$$

Antalsparameteren $n = 60$ og sandsynlighedsparameteren $p = \frac{1}{6}$ indtastes i sandsynlighedslommeregneren, og så bruges værktøjet *Højresidet* (fremhævet med rødt) til at finde det mindste tal k der opfylder at $P(X \geq k) < 5\%$:



Heraf fremgår det at den kritiske mængde er $\{16, 17, 18, \ldots, 60\}$. Det observerede udfald på 15 ligger *ikke* i den kritiske mængde; så nulhypotesen kan *ikke* forkastes.

Tip: Højresidet binomialtest
Hvis signifikansniveauet i stedet havde været på fx 1% i eksemplet ovenfor, så havde man i stedet skulle finde det mindste tal k der opfylder at $P(X \geq k) < 1\%$ ("den kritiske værdi").



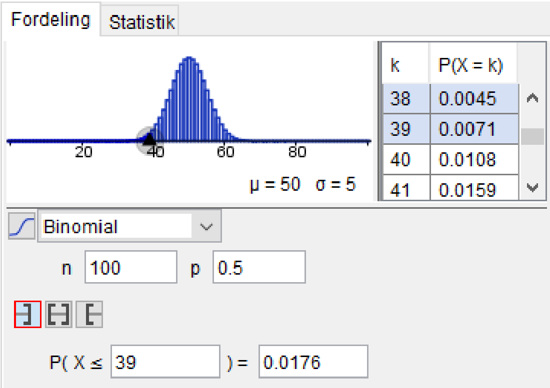
Eksempel 12.2.3: Tosidet binomialtest

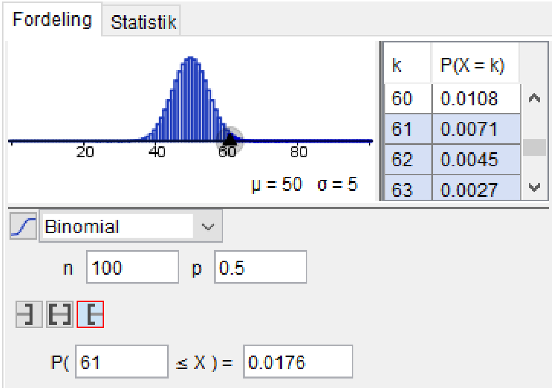
En mønt mistænkes for at være uærlig. Mønten kastes 100 gange og viser krone i 65 af kastene.

Udfør et dobbeltsidet binomialtest på signifikansniveau 5% af nulhypotesen

$$H_0\text{: } \textit{Sandsynligheden for at mønten viser krone er } \tfrac{1}{2}.$$

Antalsparameteren $n = 100$ og sandsynlighedsparameteren $p = \frac{1}{2}$ indtastes i sandsynlighedslommeregneren, og så bruges værktøjerne *Venstresidet* og *Højresidet* (fremhævet med rødt) til at finde det største tal k_1 der opfylder at $P(X \leq k_1) < 2{,}5\%$ og det mindste tal k_2 der opfylder at $P(X \geq k_2) < 2{,}5\%$:





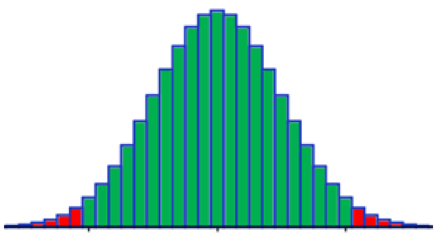
Heraf fremgår det at den kritiske mængde er

$$K = \{0,1,2,\ldots,39\} \cup \{61,62,63,\ldots,100\}.$$

Det observerede udfald på 65 ligger i den kritiske mængde; så nulhypotesen kan forkastes.

Tip: Dobbeltsidet binomialtest
Hvis signifikansniveauet i stedet havde været på fx 1% i eksemplet ovenfor, så havde man i stedet skulle finde

- det største tal k_1 der opfylder at $P(X \leq k_1) < 0{,}5\%$
- det mindste tal k_2 der opfylder at $P(X \geq k_2) < 0{,}5\%$



12.3 Bestem konfidensinterval for parameter

Problem

Du ønsker at bestemme et 95% konfidensinterval for en populationsparameter ud fra en stikprøveundersøgelse.

Løsning

Brug formel (255) i formelsamlingen:

$$\left[\hat{p} - 2 \cdot \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot (1-\hat{p})}{n}};\ \hat{p} + 2 \cdot \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot (1-\hat{p})}{n}}\right]$$

hvor n er antal elementer i stikprøven, og $\hat{p}$ er stikprøveandelen.

Eksempel 12.3.1: 95% konfidensinterval for populationsparameter

Et supermarked modtager et meget stort parti appelsiner fra en leverandør. Supermarkedets medarbejdere udtager en tilfældig stikprøve på 50 appelsiner og konstaterer at 10 af dem er dårlige.

Bestem et 95% konfidensinterval for andelen af dårlige appelsiner i partiet.

Stikprøvestørrelsen $n = 50$ og stikprøveandelen $\hat{p} = \frac{10}{50}$ indtastes i Nspire:

$$\mathbf{n} := 50 \blacktriangleright 50$$

$$\mathbf{p} := \frac{10}{\mathbf{n}} \blacktriangleright \frac{1}{5}$$

Herefter bestemmes den statistiske usikkerhed $u = 2 \cdot \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot (1-\hat{p})}{n}}$, og så bestemmes konfidensintervallet:

$$\mathbf{u} := 2 \cdot \sqrt{\frac{\mathbf{p} \cdot (1-\mathbf{p})}{\mathbf{n}}} \blacktriangleright 0.113137$$

$$[\mathbf{p} - \mathbf{u}, \mathbf{p} + \mathbf{u}] \blacktriangleright [0.086863 \quad 0.313137]$$

Det ses at [0,08686; 0,3131] er et 95% konfidensinterval for andelen af dårlige appelsiner i partiet.

13. Regression (Nspire)

13.1 Udfør regression

Problem

Du ønsker at bestemme (konstanterne i) en funktionsforskrift ud fra tabeldata.

Løsning

Første trin er at indtaste de oplyste data i applikationen *Lister og Regneark*. Derefter skal du finde ud af hvilken slags model der er tale om. Dette kan du afgøre ved at se på den forskrift du har fået oplyst:

Lineær	**Eksponentiel**	**Potens**
$y = ax + b$	$y = b \cdot a^x$	$y = b \cdot x^a$
$f(x) = ax + b$	$f(x) = b \cdot a^x$	$f(x) = b \cdot x^a$

Til sidst skal du vælge enten lineær regression, eksponentiel regression eller potensregression (afhængigt af hvilken model der er tale om).

Eksempel 13.1.1: Udfør regression

Man har målt sammenhørende værdier af to størrelser x og y og sammenfattet målingerne i en tabel:

x	83,0	81,5	79,1	78,2	76,0	75,5
y	6,48	6,42	6,28	6,22	6,20	6,15

I en model kan sammenhængen mellem x og y beskrives ved $y = ax + b$.

Benyt tabellens data til at bestemme tallene a og b.

1. Tilføj applikationen *Lister og Regneark* ved at klikke på

 *Indsæt → Lister og Regneark*.

2. Navngiv to søjler i regnearket ved at dobbeltklikke på den øverste (grå) celle i hver søjle og indtaste et passende navn.

3. Indsæt dataene tabellen i de navngivne søjler:

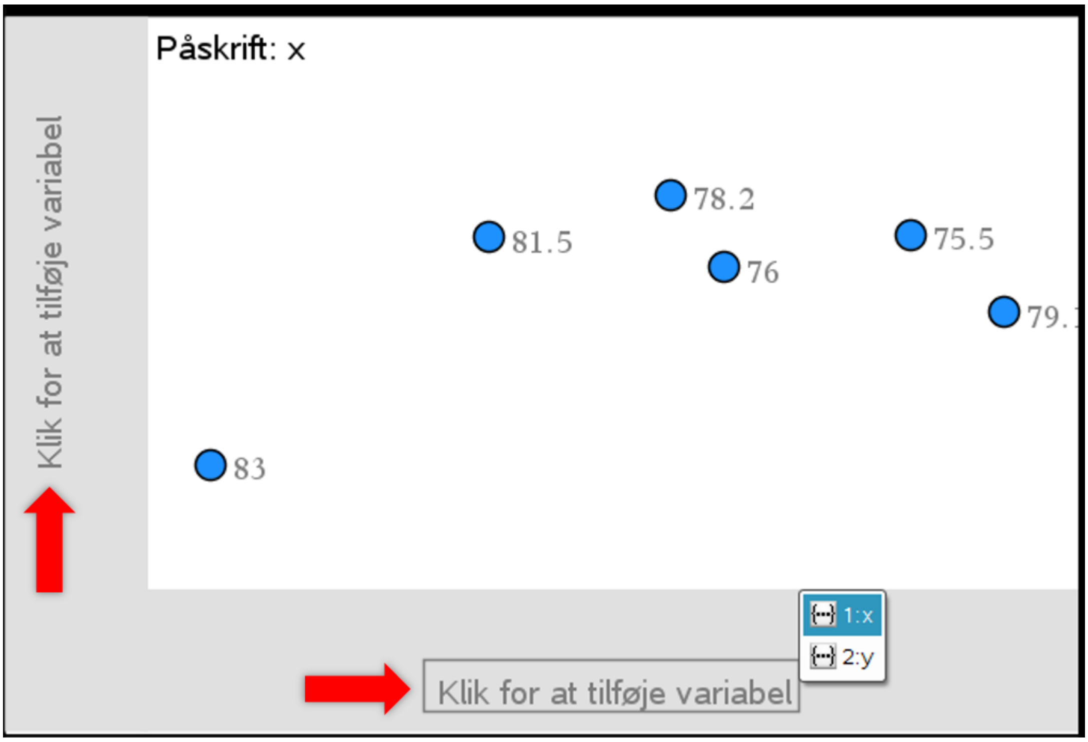
	A x	B y
=		
1	83.	6.48
2	81.5	6.42
3	79.1	6.28
4	78.2	6.22
5	76.	6.2
6	75.5	6.15

(Se Appendiks 1 for hjælp til at kopiere data fra Excel til Nspire).

4. Tilføj applikationen *Diagrammer og statistik* ved at klikke på

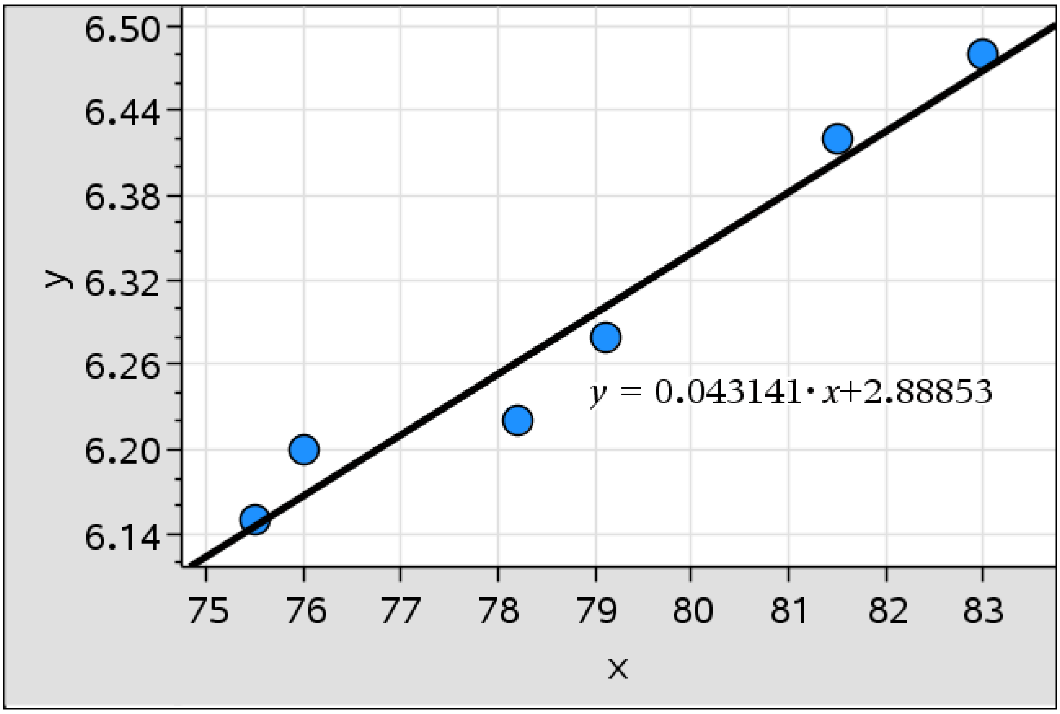
Indsæt → Diagrammer og statistik.

5. I *Diagrammer og statistik*: Klik på x-aksen og vælg navnet på den søjle i regnearket der indeholder værdierne af den uafhængige variabel. Klik derefter på y-aksen og vælg navnet på den søjle der indeholder værdierne af den afhængige variabel:



5. Inden man kan gå videre skal man finde ud af hvilken slags regression der skal udføres. I dette eksempel skal man udføre lineær regression fordi den oplyste model har formen $y = ax + b$.

6. For at udføre lineær regression skal man klikke på  og vælge *Undersøg data → Regression → Vis lineær (mx+b)*. Herefter bliver tendenslinjen indtegnet, og programmet viser dens forskrift:



Fra skærmbilledet kan man aflæse at $a = 0{,}043141$ og $b = 2{,}88853$.

En fejl der ofte bliver begået i opgaver om regression:
Man taster x-værdierne forkert ind fordi man glemmer at nærlæse opgaveteksten. (Eksempel: Man indtaster årstal som 2004, 2005, 2006 osv. selvom de ifølge opgaveteksten bør indtastes som 0, 1, 2 osv. – altså som antal år efter 2004).

13.2 Tegn residualplot

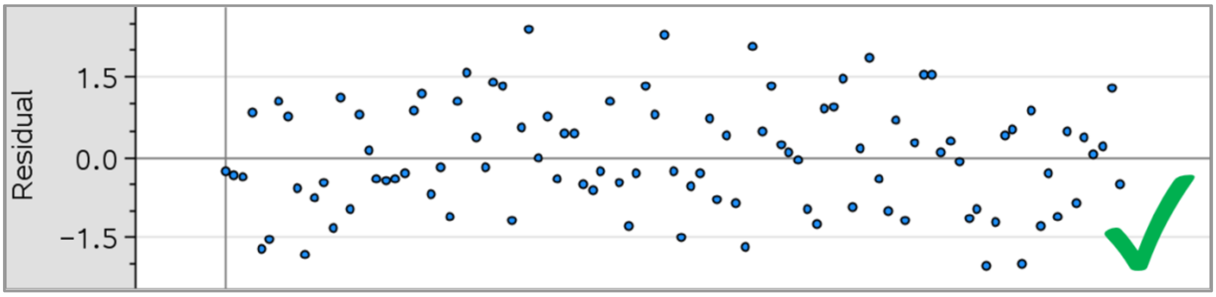
Problem

Du ønsker at tegne residualplottet hørende til en tendenslinje.

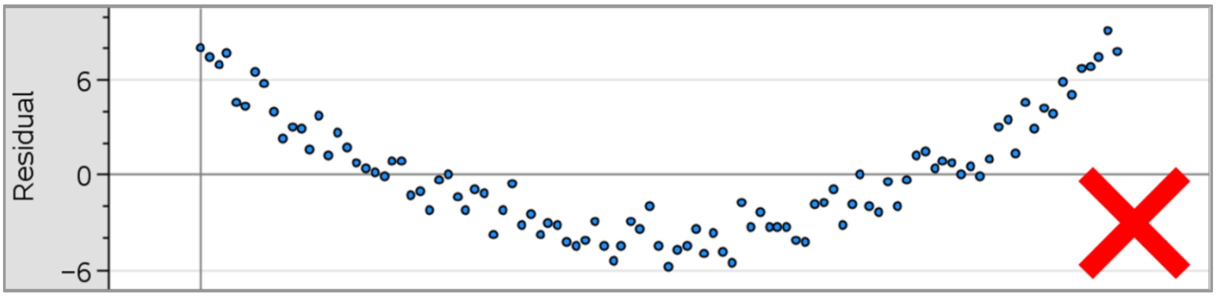
Løsning

Udfør først regression ved at følge Opskrift 13.1. I applikationen *Diagrammer og statistik*: Klik så på og vælg *Undersøg data → Residualer → Vis residual plot*.

Tip: Modelkontrol via residualplot
I residualplottet bør punkterne ligge tilfældigt fordelt omkring 0 (se figur 1 nedenfor). Hvis punkterne afviger fra 0 på en systematisk måde (fx ved at følge et parabelmønster som i figur 2 nedenfor), så er det tegn på at den anvendte regressionsmodel **ikke** er anvendelig.



Figur 1: Punkterne i residualplottet ligger tilfældigt fordelt omkring 0. Hvis modellen er anvendelig, bør residualplottet se nogenlunde således ud.



Figur 2: Punkterne i residualplottet følger et tydeligt parabelmønster. Dette indikerer at modellen **ikke** er anvendelig da modelværdierne afviger **systematisk** fra de observerede værdier.

13.3 Bestem residualspredning

Problem

Du ønsker at udregne residualspredningen hørende til en tendenslinje.

Løsning

Udfør først regression ved at følge Opskrift 13.1. Beregn derefter residualspredningen ved at indtaste følgende (fx i applikationen *Noter*):

$$\sqrt{\frac{\text{sum}(\textbf{stat.Resid}^2)}{\text{count}(\textbf{stat.Resid})-2}}$$

Herved beregnes residualspredningen, der ifølge formelsamlingen er givet ved

$$s=\sqrt{\frac{{r_1}^2+{r_2}^2+\ldots+{r_n}^2}{n-2}}$$

hvor n er antallet af målinger (punkter), og r_i er residualet hørende til punkt i.

Tip: Modelkontrol via residualspredning
Residualspredningen bør være "lille" sammenlignet med (gennemsnittet af) de observerede værdier. For at undersøge om dette er opfyldt bør man udregne hvor stor en procentdel residualspredningen udgør af gennemsnittet af de observerede værdier. Se Eksempel 13.2.1.

Eksempel 13.2.1: Modelkontrol for regression

Man har målt sammenhørende værdier af to størrelser x og y og sammenfattet målingerne i en tabel:

x	83,0	81,5	79,1	78,2	76,0	75,5
y	6,48	6,42	6,28	6,22	6,20	6,15

I en model kan sammenhængen mellem x og y beskrives ved $y=ax+b$.

Benyt residualplottet og residualspredningen til at vurdere modellens anvendelighed til at beskrive udviklingen.

Sammenhængen $y=ax+b$ er lineær, så først udføres der lineær regression som beskrevet i Opskrift 13.1. Derefter tegnes residualplottet som beskrevet i Opskrift 13.2. Endelig beregnes residualspredningen som beskrevet ovenfor, og den divideres så med gennemsnittet af y-værdierne:

	er	B yer	C	D	E
=					
1	83	6.48			
2	81.5	6.42			
3	79.1	6.28			
4	78.2	6.22			
5	76	6.2			
6	75.5	6.15			

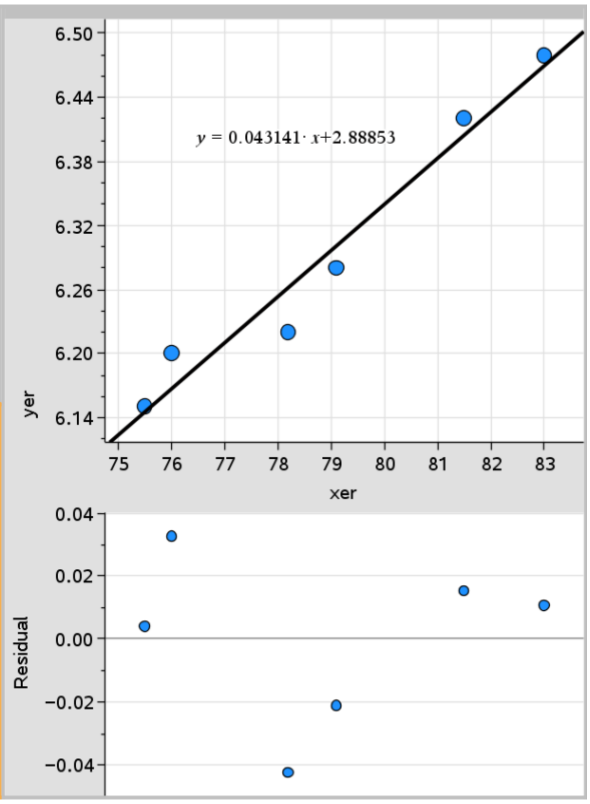
C1

Residualspredning:

$$s := \sqrt{\frac{\text{sum}(\mathbf{stat.Resid}^2)}{\text{count}(\mathbf{stat.Resid})-2}} \quad \blacktriangleright \; 0.030267$$

I forhold til gennemsnit:

$$\frac{s}{\text{mean}(\mathbf{yer})} \quad \blacktriangleright \; 0.004811$$



I residualplottet ligger punkterne tilfældigt fordelt omkring 0 og følger ikke noget mønster/system. Derudover er residualspredningen meget lille (ca. 0,48%) i forhold til (gennemsnittet af) y-værdierne. Der er altså intet der tyder på at modellen ikke er anvendelig.

14. Normalfordelingen

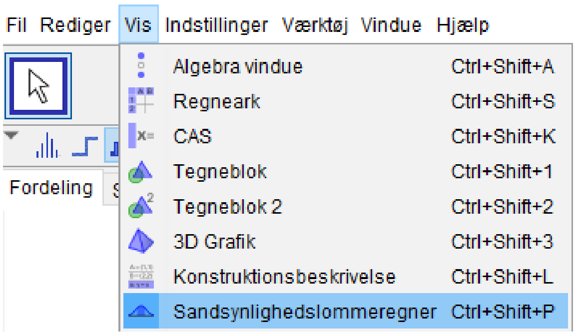
14.1 Tegn graf for tæthedsfunktion (GeoGebra)

Problem

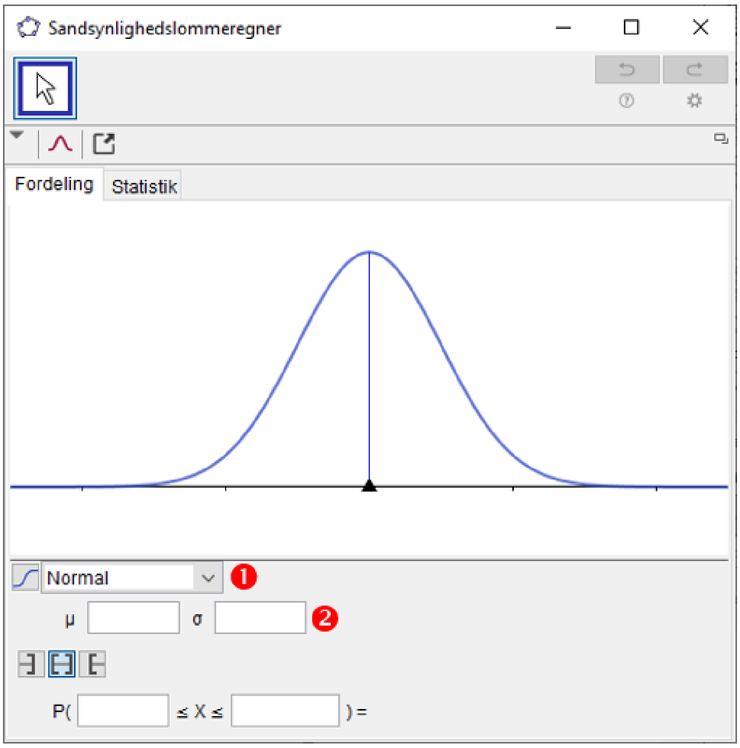
Du ønsker at tegne grafen for tæthedsfunktionen for en normalfordelt stokastisk variabel $X \sim N(\mu, \sigma)$, hvor du kender middelværdien μ og spredningen σ.

Løsning

Åbn sandsynlighedslommeregneren i GeoGebra:



Vælg *Normal* fra dropdown-menuen (1) og indtast middelværdien μ samt spredningen σ (2). Så vises grafen for tæthedsfunktionen (den klokkeformede kurve).



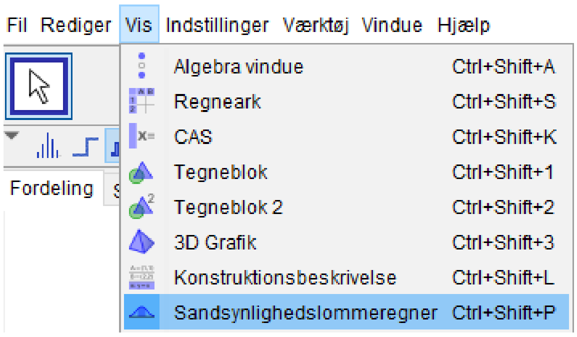
14.2 Tegn graf for fordelingsfunktion (GeoGebra)

Problem

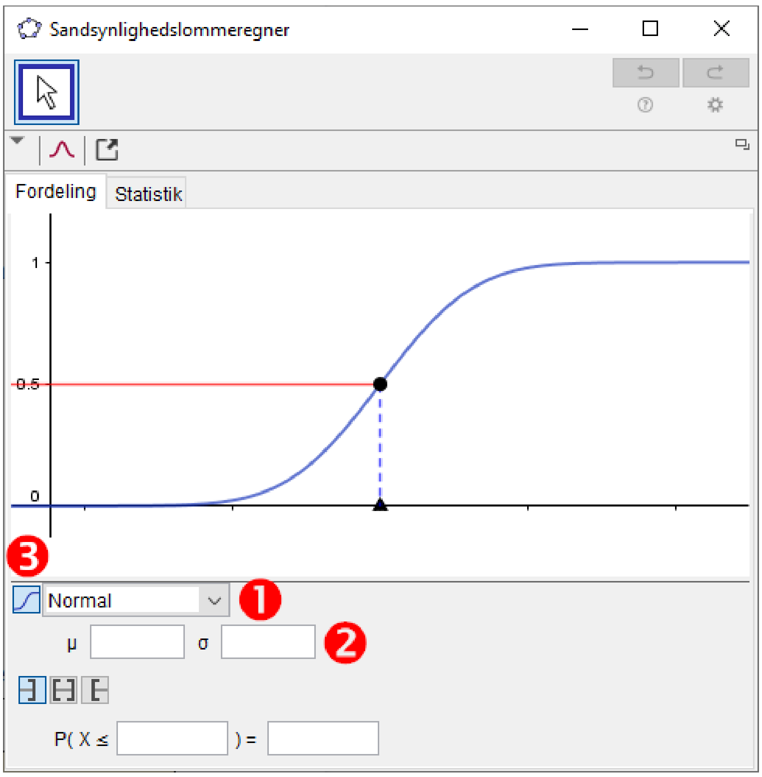
Du ønsker at tegne grafen for fordelingsfunktionen for en normalfordelt stokastisk variabel $X \sim N(\mu, \sigma)$, hvor du kender parametrene μ og σ.

Løsning

Åbn sandsynlighedslommeregneren i GeoGebra:



Vælg *Normal* fra dropdown-menuen (1), indtast middelværdien μ samt spredningen σ (2) og klik så på ikonet (3). Så vises grafen for fordelingsfunktionen (den har form som kurven på knappen).



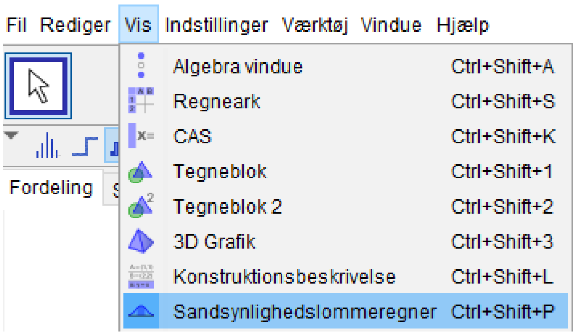
14.3 Bestem sandsynligheder (GeoGebra)

Problem

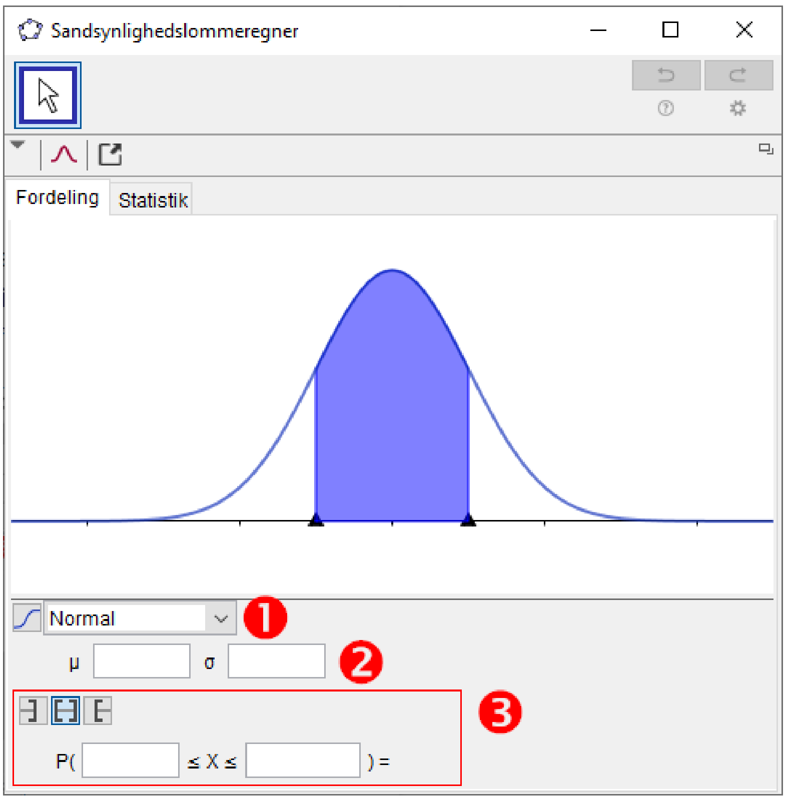
Du kender middelværdien og spredningen for en normalfordelt stokastisk variabel $X \sim N(\mu, \sigma)$, og du ønsker at finde sandsynligheder som $P(X \le a)$, $P(X \ge a)$ eller $P(a \le X \le b)$.

Løsning

Åbn sandsynlighedslommeregneren i GeoGebra:



Vælg *Normal* fra dropdown-menuen (1), indtast middelværdien μ samt spredningen σ (2) og brug så områdevælgeren nederst i vinduet (3). Se Eksempel 14.3.1.



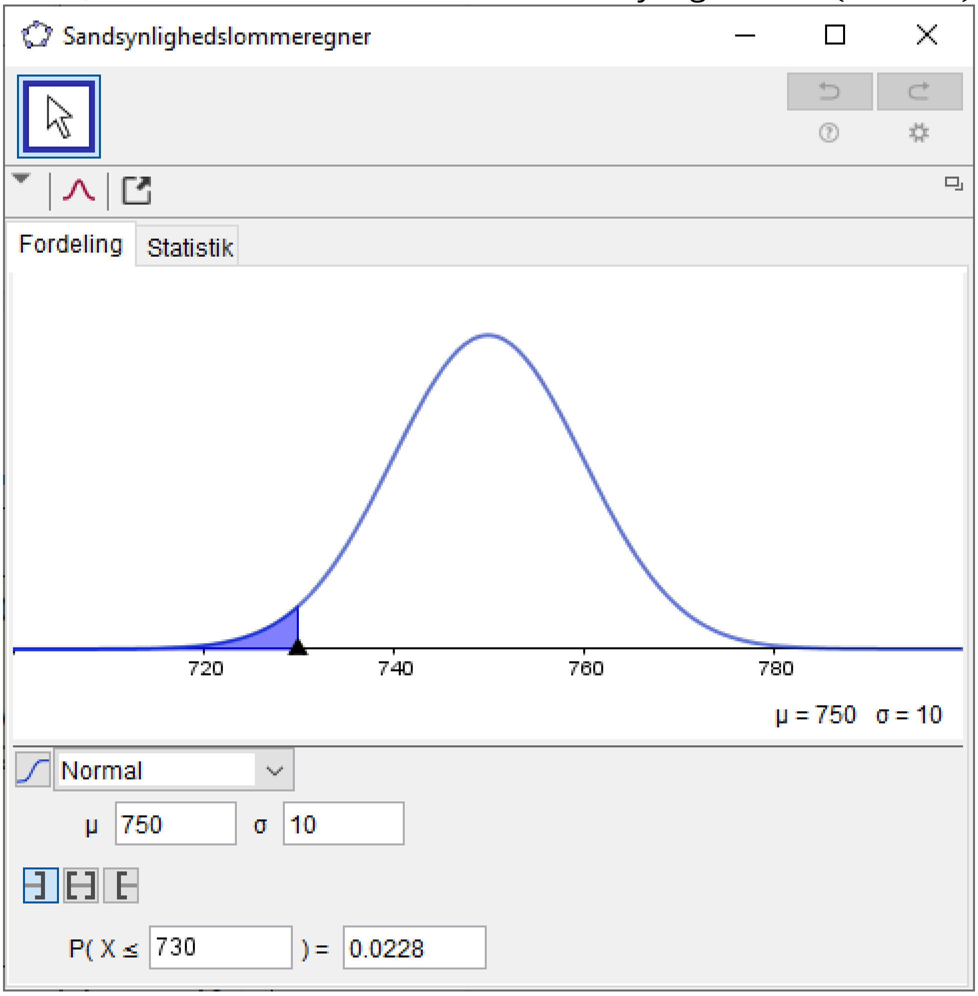
Eksempel 14.3.1: Bestem sandsynlighed i normalfordeling

En bestemt slags müsli sælges i poser. På hver pose står der "750 gram", men vægten varierer faktisk en lille smule fra pose til pose.

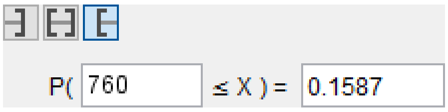
Det antages at vægten af hver pose er normalfordelt med middelværdi 750 gram og spredning 10 gram. Bestem under denne antagelse sandsynligheden for at en tilfældigt valgt pose

a) vejer mindre end 730 gram
b) vejer mere end 760 gram
c) vejer mellem 745 gram og 755 gram

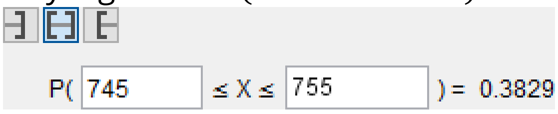
Der er tale om en normalfordeling med middelværdi $\mu = 750$ og spredning $\sigma = 10$. Disse oplysninger indtastes i GeoGebras sandsynlighedslommeregner, og spørgsmål a) besvares så ved at bestemme sandsynligheden $P(X \leq 730)$:



Det ses at $P(X \leq 730) \approx 0{,}0228$. Så sandsynligheden for at en tilfældigt valgt pose vejer mindre end 730 gram er ca. 2,28%. Tilsvarende besvares spørgsmål b) ved at bestemme sandsynligheden $P(X \geq 760)$:



Det ses at $P(X \geq 760) \approx 0{,}1587$. Så sandsynligheden for at en tilfældigt valgt pose vejer mere end 760 gram er ca. 15,87%. Endelig besvares spørgsmål c) ved at bestemme sandsynligheden $P(745 \leq X \leq 755)$:



Det ses at $P(745 \leq X \leq 755) \approx 0{,}3829$. Så sandsynligheden for at en tilfældigt valgt pose vejer mellem 745 gram og 755 gram er ca. 38,29%.

14.4 Bestem sandsynligheder (Nspire)

Problem

Du kender middelværdien og spredningen for en normalfordelt stokastisk variabel $X \sim N(\mu, \sigma)$, og du ønsker at finde sandsynligheder som $P(X \leq a)$, $P(X \geq a)$ eller $P(a \leq X \leq b)$.

Løsning

Brug kommandoen **`normCdf`**, der har formen

$$\text{normCdf}(a, b, \mu, \sigma)$$

Denne funktion beregner sandsynligheden $P(a \leq X \leq b)$. Ved at vælge $a = -\infty$ fås $P(X \leq b)$. Ved at vælge $b = \infty$ fås $P(X \geq a)$.

Eksempel 14.4.1: Bestem sandsynlighed i normalfordeling

En bestemt slags müsli sælges i poser. På hver pose står der "750 gram", men vægten varierer faktisk en lille smule fra pose til pose.

Det antages at vægten af hver pose er normalfordelt med middelværdi 750 gram og spredning 10 gram. Bestem under denne antagelse sandsynligheden for at en tilfældigt valgt pose

a) vejer mindre end 730 gram
b) vejer mere end 760 gram
c) vejer mellem 745 gram og 755 gram

Der er tale om en normalfordeling med middelværdi $\mu = 750$ og spredning $\sigma = 10$. Spørgsmål a) kan besvares ved at bestemme sandsynligheden $P(X \leq 730)$:

$$\text{normCdf}(-\infty, 730, 750, 10) \blacktriangleright 0.02275$$

Det ses at $P(X \leq 730) \approx 0{,}02275$. Så sandsynligheden for at en tilfældigt valgt pose vejer mindre end 730 gram er ca. 2,275%.
Tilsvarende besvares b) ved at bestemme sandsynligheden $P(X \geq 760)$:

$$\text{normCdf}(760, \infty, 750, 10) \blacktriangleright 0.158655$$

Det ses at $P(X \geq 760) \approx 0{,}1587$. Så sandsynligheden for at en tilfældigt valgt pose vejer mere end 760 gram er ca. 15,87%.

Endelig besvares c) ved at bestemme sandsynligheden $P(745 \leq X \leq 755)$:

$$\text{normCdf}(745, 755, 750, 10) \blacktriangleright 0.382925$$

Det ses at $P(745 \leq X \leq 755) \approx 0{,}3829$. Så sandsynligheden for at en tilfældigt valgt pose vejer mellem 745 gram og 755 gram er ca. 38,29%.

Eksempel 14.4.2: Bestem intervalgrænser så givet sandsynlighed opnås

En stokastisk variabel X er normalfordelt, $X \sim N(0,1)$.

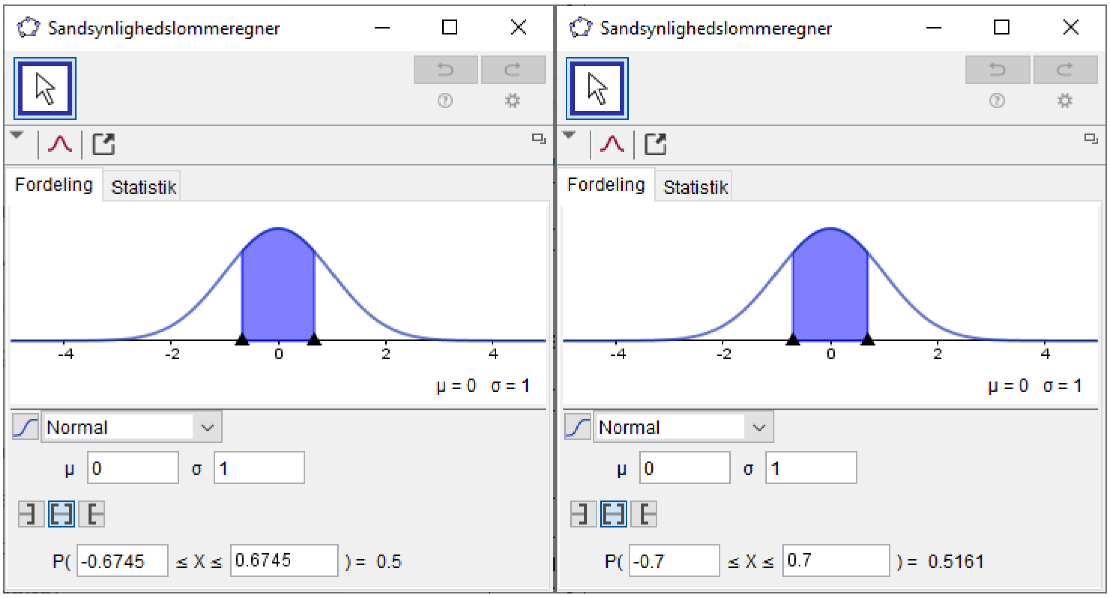
a) Bestem $a > 0$ således at $P(-a \leq X \leq a) = 0{,}5$.

b) Bestem mængden af positive tal a således at $P(-a \leq X \leq a) > 0{,}5$.

Spørgsmål a) besvares ved at løse ligningen $P(-a \leq X \leq a) = 0{,}5$ mht. a:

$$\text{solve}(\text{normCdf}(-a, a, 0, 1) = 0.5, a) | a > 0 \blacktriangleright a = 0.67449$$

Det ses at man skal vælge $a \approx 0{,}6745$ for at få $P(-a \leq X \leq a) = 0{,}5$. Hvis $a > 0{,}6745$, så dækkes et større areal under grafen for tæthedsfunktionen, og sandsynligheden bliver derfor større end 0,5 (jf. følgende skærmbillede):



Svaret på spørgsmål b) må derfor være: alle tal $a > 0{,}6745$.

14.5 Undersøg om data er normalfordelte (Nspire)

Problem

Du ønsker at tjekke om nogle foreliggende målinger kan antages at komme fra en normalfordeling. I bekræftende fald ønsker du at bestemme (estimere) normalfordelingens middelværdi μ og spredning σ.

Løsning

Lav et normalfordelingsplot for målingerne som vist i de følgende eksempler.

Eksempel 14.5.1: Tjek om data er normalfordelte (antagelse accepteres)

En bestemt slags müsli sælges i poser. På hver pose står der "750 gram", men vægten varierer faktisk en lille smule fra pose til pose. Tabellen herunder viser resultatet af en række kontrolvejninger (tallene angiver posernes vægt i gram).

739,5	741,8	739,8	745,2	747,2	743,9	754,1	743,7
743,2	750,7	757,4	745,1	741,2	743,1	756,0	741,8
754,2	729,3	747,2	758,5	745,8	750,8	750,8	745,1

Undersøg om vægten af poserne med god tilnærmelse kan beskrives ved en normalfordelt stokastisk variabel X.

1. Tilføj applikationen *Lister og Regneark* ved at klikke på

Indsæt → Lister og Regneark

2. Navngiv den første søjle i regnearket (dobbeltklik i den øverste grå celle og indtast et navn som f.eks. `vægt_g`) og kopiér så dataene over i søjlen:

	A vægt_g
=	
1	739.5
2	741.8
3	739.8
4	...

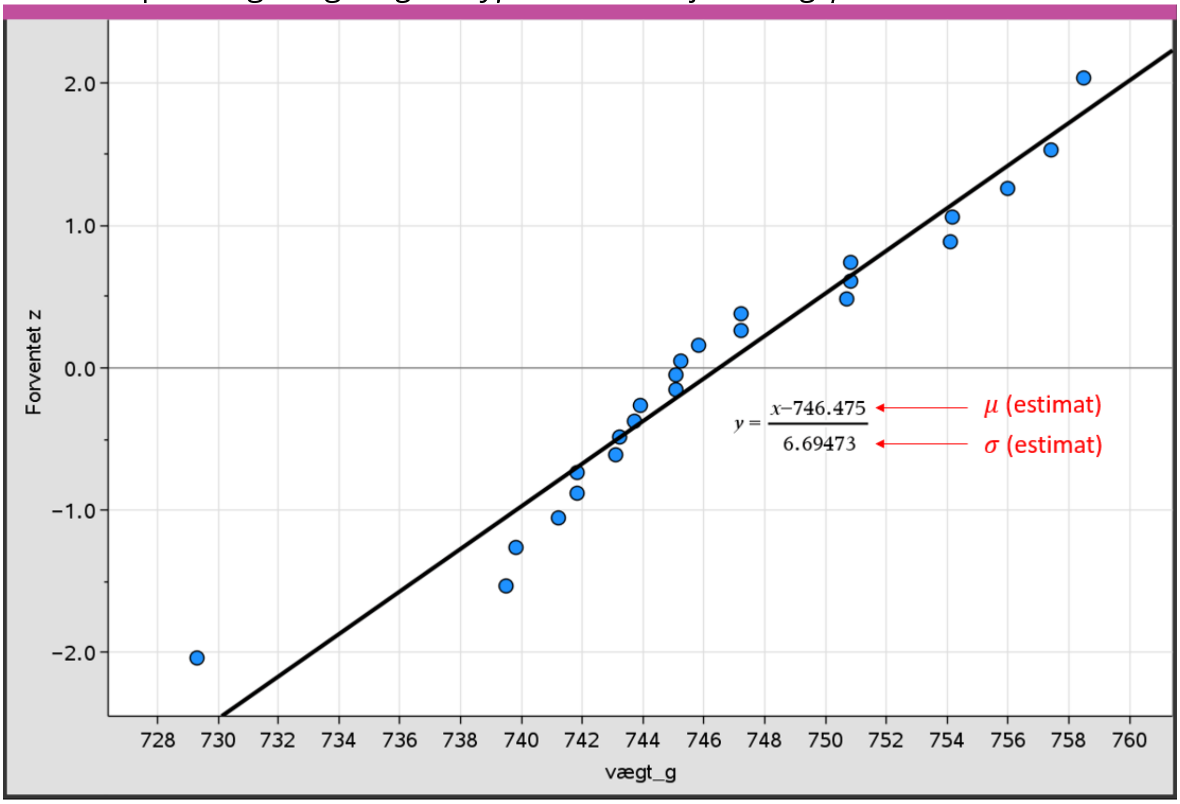
(Se Appendiks 1 for hjælp til at kopiere data fra Excel til Nspire).

3. Tilføj applikationen *Diagrammer og statistik* ved at klikke på

Indsæt → *Diagrammer og statistik*.

I *Diagrammer og statistik*: Klik på x-aksen og vælg navnet på den søjle i regnearket der indeholder dataene.

4. Klik så på og vælg *Diagramtyper* → *Normalfordelingsplot*.



5. Kig nu på normalfordelingsplottet: Hvis punkterne nogenlunde følger en ret linje (altså uden *systematisk* afvigelse), så kan målingerne antages at stamme fra en normalfordeling, og middelværdien μ samt spredningen σ kan aflæses fra den ligning som programmet viser (se skærmbilledet ovenfor).

I plottet ovenfor følger punkterne nogenlunde en ret linje; så vægten af poserne kan med god tilnærmelse beskrives ved en normalfordelt stokastisk variabel $X \sim N(\mu, \sigma)$. Fra ligningen i plottet kan man aflæse middelværdien $\mu \approx$ 746,5 og spredningen $\sigma \approx$ 6,645 (estimater).

(Hvis punkterne i normalfordelingsplottet afviger *systematisk* fra en ret linje (se Eksempel 14.5.2), så kan det *ikke* antages at målingerne stammer fra en normalfordeling).

Eksempel 14.5.2: Tjek om data er normalfordelte (antagelse forkastes)

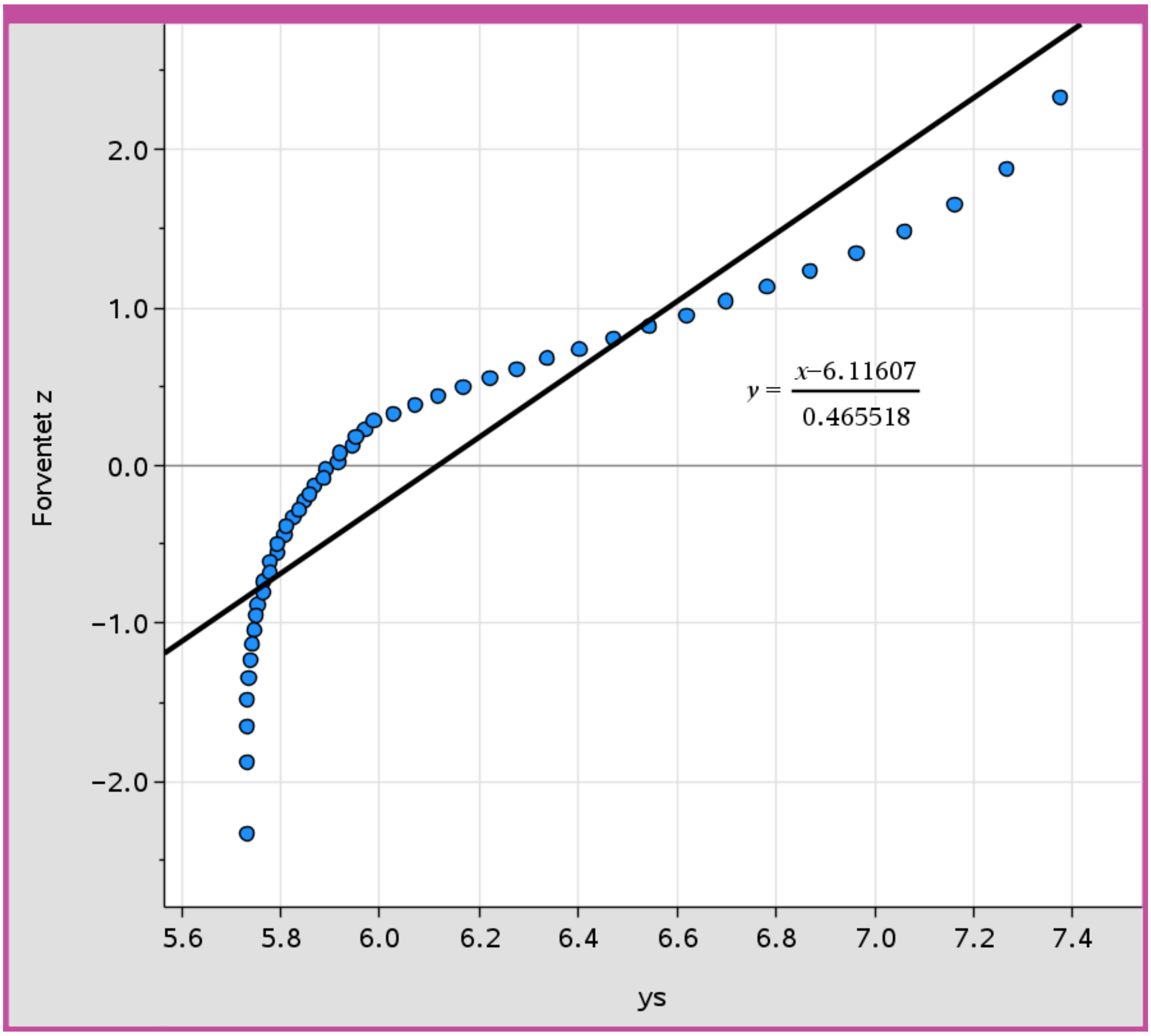
Der er givet en række målinger fra et eksperiment:

5,97071	5,94286	...	7,26484	7,375

(Der er i alt 50 målinger, men af pladshensyn vises her kun nogle af dem).

Undersøg om målingerne kan antages at komme fra en normalfordeling.

Ved at følge fremgangsmåden fra Eksempel 14.5.1 får man følgende normalfordelingsplot:



Punkterne i plottet afviger *systematisk* fra en ret linje (de følger snarere et slags parabelformet mønster). Derfor kan målingerne *ikke* antages at komme fra en normalfordeling.

14.6 Bestem middelværdi og/eller spredning (Nspire)

Problem

Du har fået nogle oplysninger om en normalfordelt stokastisk variabel $X \sim N(\mu, \sigma)$ og ønsker at bestemme (eller estimere) middelværdien μ og/eller spredningen σ på baggrund af disse oplysninger.

Løsning

Fremgangsmåden afhænger af hvilke oplysninger man har fået. Se eksemplerne nedenfor.

Eksempel 14.6.1: Bestem middelværdi og spredning ud fra datasæt

En bestemt slags müsli sælges i poser. På hver pose står der "750 gram", men vægten varierer faktisk en lille smule fra pose til pose. Tabellen herunder viser resultatet af en række kontrolvejninger (tallene angiver posernes vægt i gram).

739,5	741,8	739,8	745,2	747,2	743,9	754,1	743,7
743,2	750,7	757,4	745,1	741,2	743,1	756,0	741,8
754,2	729,3	747,2	758,5	745,8	750,8	750,8	745,1

Det antages at vægten af poserne med god tilnærmelse kan beskrives ved en normalfordelt stokastisk variabel $X \sim N(\mu, \sigma)$.

Bestem middelværdien μ og spredningen σ for X.

Følg fremgangsmåden fra Eksempel 14.5.1.

Eksempel 14.6.2: Kendt middelværdi, ukendt spredning 1

En stokastisk variabel X er normalfordelt, $X \sim N(10, s)$. Middelværdien er 10, men spredningen s er ukendt.

Bestem spredningen s når det oplyses at $P(5 \leq X \leq 15) = 0{,}9044$.

Ligningen $P(5 \leq X \leq 15) = 0{,}9044$ løses med hensyn til spredningen s (der altid er et positivt tal) ved hjælp af **`solve`** og **`normCdf`** (Opskrift 14.4):

$$\text{solve}(\text{normCdf}(5, 15, 10, s) = 0.9044, s)|s > 0 \blacktriangleright s = 3.00017$$

Spredningen er altså ca. 3.

Eksempel 14.6.3: Kendt middelværdi, ukendt spredning 2

En stokastisk variabel X er normalfordelt, $X \sim N(10, s)$. Middelværdien er 10, men spredningen s er ukendt.

Bestem spredningen s når det oplyses at fordelingsfunktionen F opfylder at $F(8) = 0{,}0478$.

Oplysningen om fordelingsfunktionen betyder at $P(X \leq 8) = 0{,}0478$. Denne ligning løses med hensyn til spredningen s (der altid er et positivt tal) ved hjælp af kommandoerne **`solve`** og **`normCdf`** (Opskrift 14.4):

$$\text{solve}(\text{normCdf}(-\infty, 8, 10, s) = 0.0478, s)|s > 0 \blacktriangleright s = 1.20007$$

Spredningen er altså ca. 1,2.

Eksempel 14.6.4: Ukendt middelværdi, kendt spredning

En stokastisk variabel X er normalfordelt, $X \sim N(k, 2)$. Spredningen er 2. Middelværdien k er positiv.

Bestem middelværdien k når det oplyses at fordelingsfunktionen F opfylder at $F(7{,}2) = 0{,}5398$.

Oplysningen om fordelingsfunktionen betyder at $P(X \leq 7{,}2) = 0{,}5398$. Denne ligning løses med hensyn til middelværdien k (der oplyses at være positiv) ved hjælp af kommandoerne **`solve`** og **`normCdf`** (Opskrift 14.4):

$$\text{solve}(\text{normCdf}(-\infty, 7.2, k, 2) = 0.5398, k)|k > 0 \blacktriangleright k = 7.00014$$

Middelværdien er altså ca. 7.

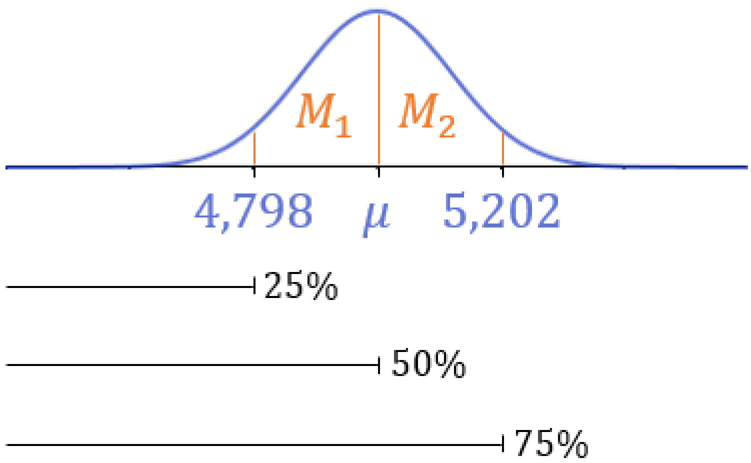
Eksempel 14.6.5: Ukendt middelværdi og spredning

En stokastisk variabel X er normalfordelt, $X \sim N(\mu, \sigma)$. Det oplyses at

$$P(X \leq 4{,}798) = 0{,}25 \text{ og } P(X \leq 5{,}202) = 0{,}75.$$

Bestem middelværdi og spredning for X.

Vi starter med at indtegne oplysningerne på en skitse af grafen for tæthedsfunktionen:



Ved at se på de tre sorte streger under grafen (der angiver værdier for fordelingsfunktionen) ses det at arealet af områderne M_1 og M_2 begge er $25\% = 0{,}25$. Da M_1 og M_2 har samme areal, må middelværdien μ ligge midt imellem tallene 5,202 og 4,798, dvs.

$$\mu = \frac{5{,}202 + 4{,}798}{2} = 5$$

Nu kan spredningen findes ved at gå frem som i Eksempel 14.6.2 eller 14.6.3.

14.7 Tjek om residualer er normalfordelte (Nspire)

Problem

Du ønsker at undersøge om residualerne fra en regressionsanalyse er normalfordelte.

Løsning

Udfør først regressionen som forklaret i Opskrift 13.1. Programmet gemmer residualerne fra regressionen i variablen **stat.resid**. Tjek om residualerne er normalfordelte ved at følge Trin 3 og frem i Eksempel 14.5.1 med **stat.resid** på x-aksen. Se Eksempel 14.7.1 nedenfor.

Eksempel 14.7.1: Undersøg om residualer er normalfordelte

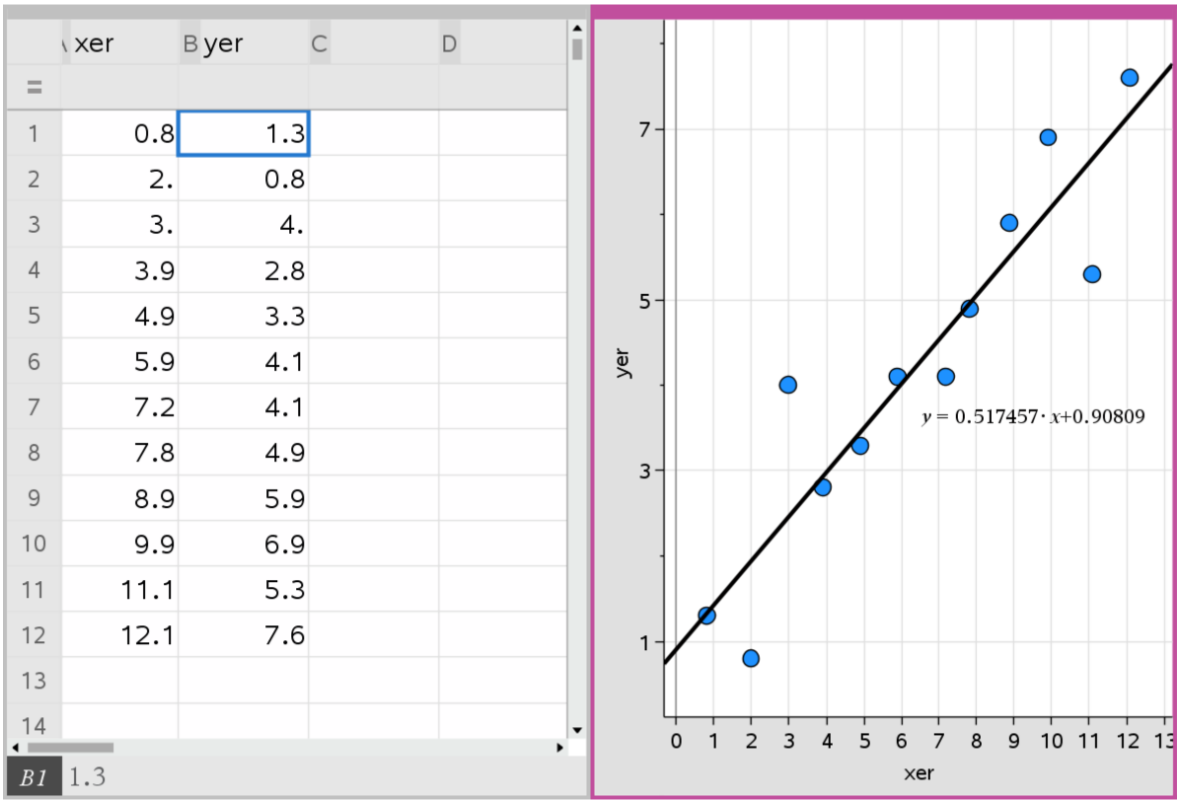
Man har målt sammenhørende værdier af to størrelser x og y og sammenfattet målingerne i en tabel:

x	0,8	2,0	3,0	3,9	4,9	5,9	7,2	7,8	8,9	9,9	11,1	12,1
y	1,3	0,8	4,0	2,8	3,3	4,1	4,1	4,9	5,9	6,9	5,3	7,6

I en model antages det at y er en lineær funktion af x. Modellen bestemmes ved lineær regression på tabellens data.

Undersøg om residualerne i modellen med god tilnærmelse kan siges at være normalfordelte.

1. Udfør først regressionen som forklaret i Opskrift 13.1:

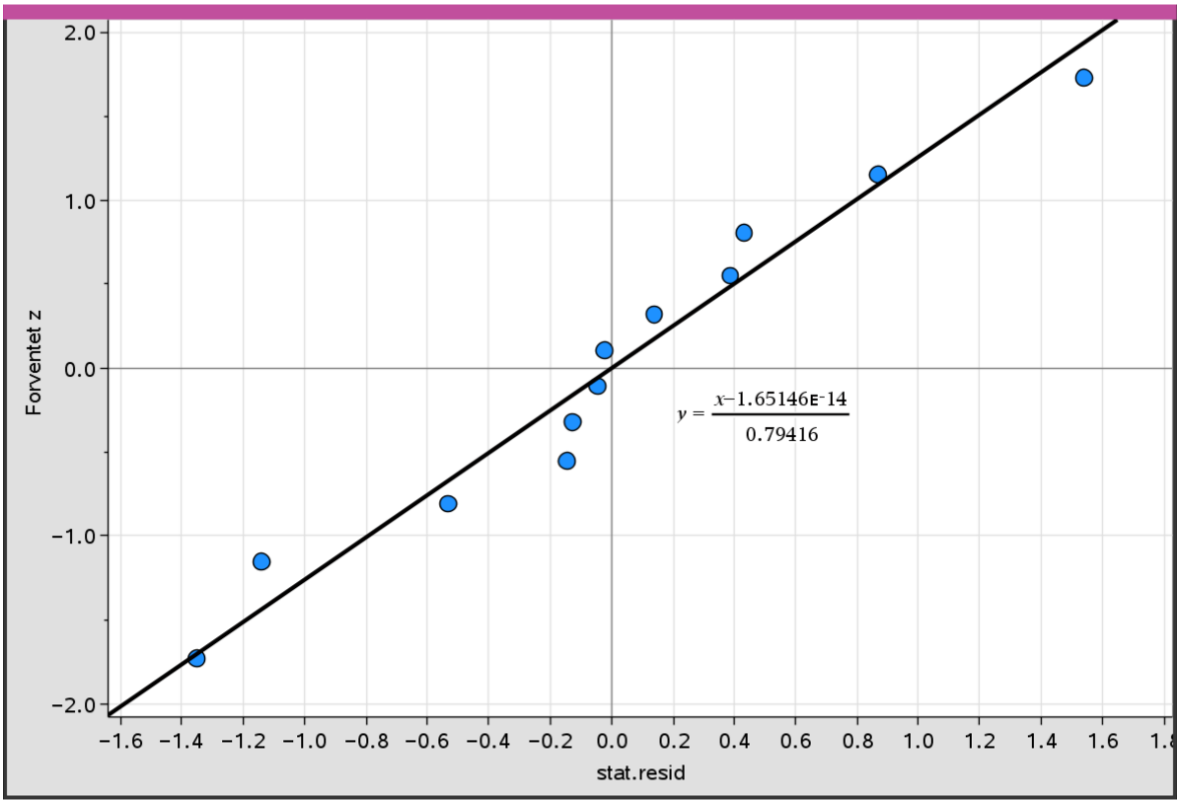


2. Tilføj herefter endnu en *Diagrammer og statistik* ved at klikke på

Indsæt → Diagrammer og statistik

Klik her på x-aksen og vælg **stat.resid**, så residualerne bliver afsat på x-aksen.

3. Klik endelig på og vælg *Diagramtyper → Normalfordelingsplot*:



4. Vurdér plottet som forklaret i Eksempel 14.5.1: Hvis punkterne i normalfordelingsplottet nogenlunde følger en ret linje (altså uden *systematisk* afvigelse), så kan residualerne med god tilnærmelse siges at være normalfordelte.

(Hvis punkterne i normalfordelingsplottet afviger *systematisk* fra en ret linje (se Eksempel 14.5.2), så kan residualerne *ikke* antages at være normalfordelte).

14.8 Bestem konfidensinterval for hældning (Nspire)

Problem

Du ønsker at bestemme et konfidensinterval for hældningskoefficienten i en lineær regressionsmodel.

Løsning

I Nspire-regnearket der indeholder dataene for den uafhængige variabel og den afhængige variabel: Klik på , vælg *Statistik* → *Konfidensintervaller* → *Lineær reg t intervaller* og vælg så "hældning" fra den dropdown-menu der dukker op. Udfyld

- *X-liste*: Navnet på søjlen med x-værdierne.
- *Y-liste*: Navnet på søjlen med y-værdierne.

Indstillingen *C-niveau* er som udgangspunkt sat til 0.95, hvilket giver et 95%-konfidensinterval. (Hvis man fx har brug for et 99%-konfidensinterval, så kan man ændre *C-niveau* til 0.99).

Eksempel 14.8.1: Bestem et 95%-konfidensinterval for hældning

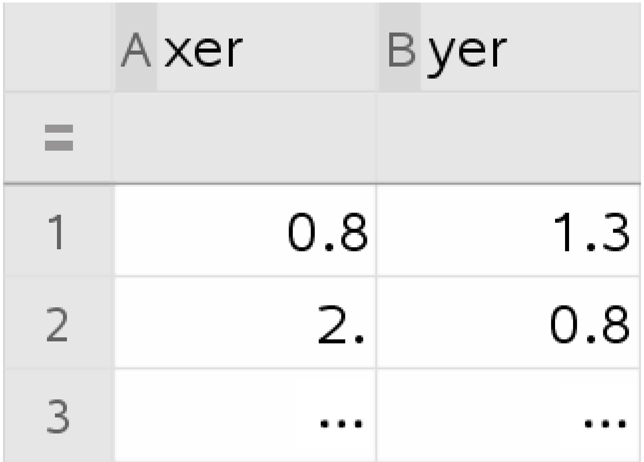
Man har målt sammenhørende værdier af to størrelser x og y og sammenfattet målingerne i en tabel:

x	0,8	2,0	3,0	3,9	4,9	5,9	7,2	7,8	8,9	9,9	11,1	12,1
y	1,3	0,8	4,0	2,8	3,3	4,1	4,1	4,9	5,9	6,9	5,3	7,6

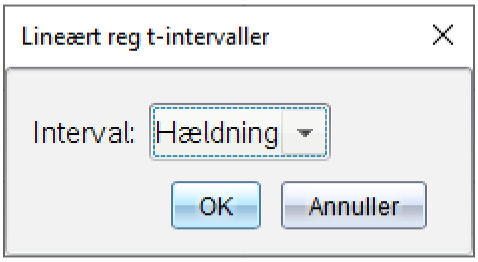
I en model antages det at y er en lineær funktion af x. Modellen bestemmes ved lineær regression på tabellens data.

Bestem et 95%-konfidensinterval for hældningskoefficienten i modellen.

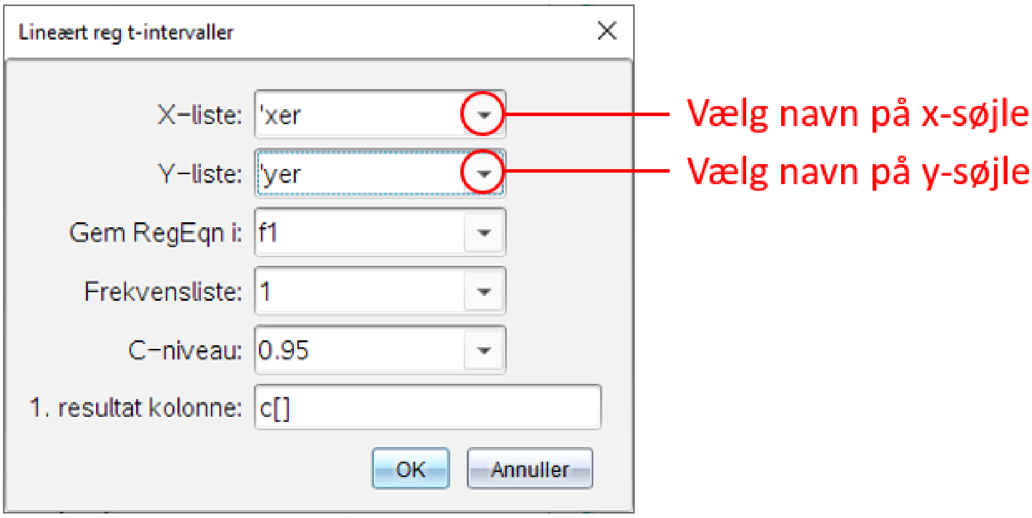
Indsæt dataene i to søjler i Nspires applikation *Lister og regneark*, og giv hver søjle et passende navn.



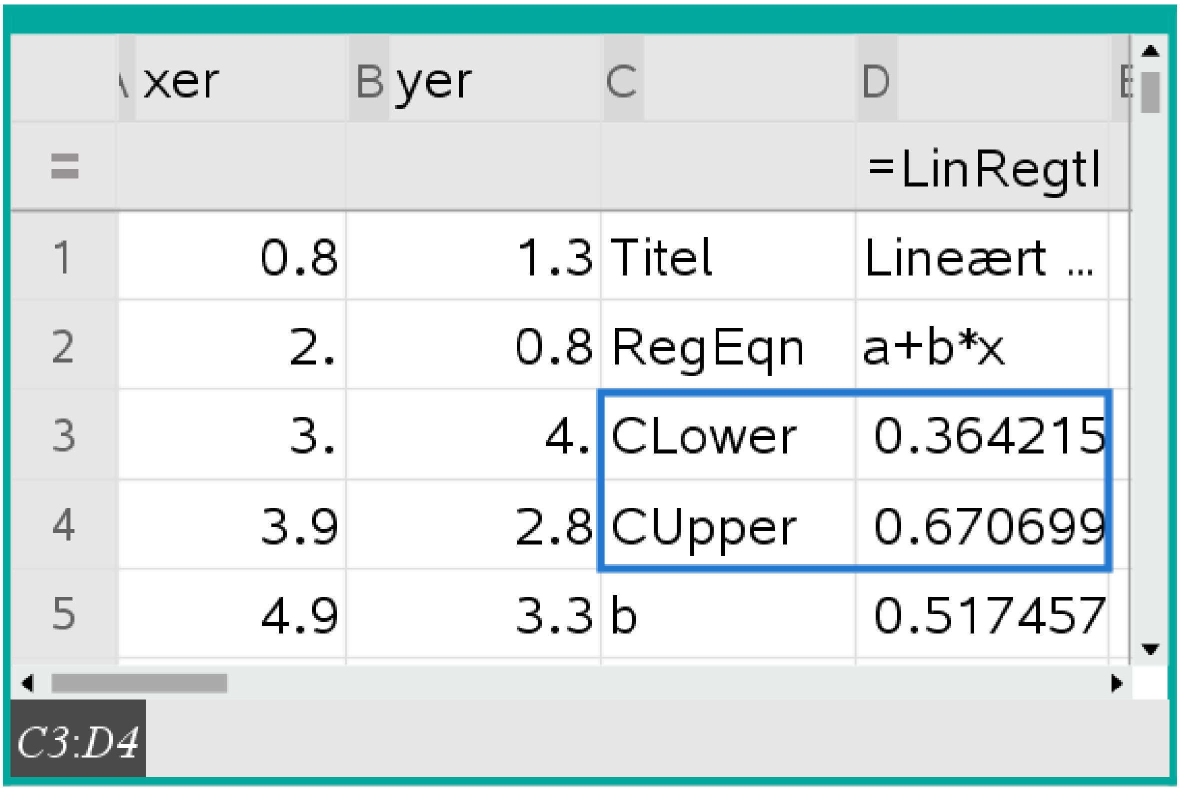
2. Klik så på og vælg *Statistik* → *Konfidensintervaller* → *Lineær reg t intervaller*. Vælg "hældning" fra den dropdown-menu der dukker op.



3. Der dukker så et nyt vindue op; indtast her navnene på x-søjlen og y-søjlen og klik på *OK*:



4. I regnearket vises der så en masse oplysninger om den lineære regression, herunder et 95%-konfidensinterval for hældningen:



Konfidensintervallet starter ved *CLower* og slutter ved *CUpper*. Så i eksemplet ovenfor er [0,364215; 0,670699] et 95%-konfidensinterval for hældningen.

15. Differensligninger (Nspire)

15.1 Bestem elementer i talfølge

Problem

Du kender en differensligning samt en eller flere begyndelsesværdier, og du ønsker at bestemme nogle af elementerne i den resulterende talfølge.

Løsning

Brug applikationen *Lister og regneark* i Nspire. Se eksemplerne nedenfor.

Eksempel 15.1.1: Givet y_0 samt $y_{n+1} = g(y_n)$, bestem y_1, y_2, y_3, …

En differensligning er givet ved

$$y_{n+1} = 2 \cdot y_n - 3, \qquad n = 0,1,2, \ldots$$

Det oplyses at $y_0 = 5$.

Bestem $y_1, y_2, \ldots, y_{10}$.

Tilføj applikationen *Lister og regneark* i Nspire ved at klikke på

Indsæt → Lister og regneark

I søjle A: Indtast 0 (nummeret på den oplyste begyndelsesværdi) i den første (hvide) celle. Indtast så følgende i søjlens anden celle og tryk `ENTER`:

```
=a1+1
```

(Dette lægger 1 til den foregående værdi).

I søjle B: Indtast 5 (den oplyste begyndelsesværdi) i den første (hvide) celle. I søjlens anden celle: Indtast et lighedstegn efterfulgt af højre side af differensligningen (med `b1` i stedet for y_n):

```
=2*b1-3
```

Klik nu på celle a2 (celle 2 i søjle A), hold musen over cellens nederste højre hjørne (så markøren ændres til ✚) og træk ned til celle a11. Gør tilsvarende i søjle B:

	A n	B y_n
1	0	5
2	1	7
3	2	11
4	3	19
5	4	35
6	5	67
7	6	131
8	7	259
9	8	515
10	9	1027
11	10	2051

I søjle B kan man så aflæse at $y_1 = 7$, $y_2 = 11$, …, $y_{10} = 2051$.

Eksempel 15.1.2: Bestem elementer i talfølge (andenordens differenslign.)

En andenordens differensligning er givet ved

$$y_{n+1} = -y_n + 2y_{n-1}, \qquad n = 1,2,3,\ldots$$

Det oplyses at $y_0 = 1$ og $y_1 = 7$.

Bestem y_2, y_3, y_4 og y_5.

Tilføj applikationen *Lister og regneark* i Nspire ved at klikke på

Indsæt → Lister og regneark

I søjle A: Indtast 0 og 1 (numrene på de oplyste begyndelsesværdier) i de to første (hvide) celler. Indtast så følgende i søjlens tredje celle og tryk ENTER:

=a2+1

(Dette lægger 1 til den foregående værdi).

I søjle B: Indtast 1 og 7 (de oplyste begyndelsesværdier) i de to første (hvide) celler. I søjlens tredje celle: Indtast et lighedstegn efterfulgt af højre side af differensligningen (med b2 i stedet for y_n og b1 i stedet for y_{n-1}):

=-b2+2*b1

Klik nu på celle a3 (celle 3 i søjle A), hold musen over cellens nederste højre hjørne (så markøren ændres til ✥) og træk ned til celle a6. Gør tilsvarende i søjle B:

	A n	B y_n
=		
1	0	1
2	1	7
3	2	-5
4	3	19
5	4	-29
6	5	67

=a2+1

=-b2+2·b1

I søjle B kan man nu aflæse: $y_2 = -5$, $y_3 = 19$, $y_4 = -29$ og $y_5 = 67$.

15.2 Tegn punktplot

Problem

Du kender en differensligning $y_{n+1} = \cdots$ samt en eller flere begyndelsesværdier, og du ønsker at tegne et punktplot for den resulterende talfølge.

Løsning

Bestem først nogle elementer i talfølgen (Opskrift 15.1). Indsæt derefter applikationen *Diagrammer og statistik* og afsæt n på x-aksen og y_n på y-aksen. (Alternativt kan man lave et punktplot i applikationen *Grafer*). Se eksemplerne nedenfor.

Eksempel 15.2.1: Tegn punktplot for differensligning (metode 1)

En differensligning er givet ved

$$y_{n+1} = 2 \cdot y_n - 3, \qquad n = 0,1,2,\ldots$$

Det oplyses at $y_0 = 5$.

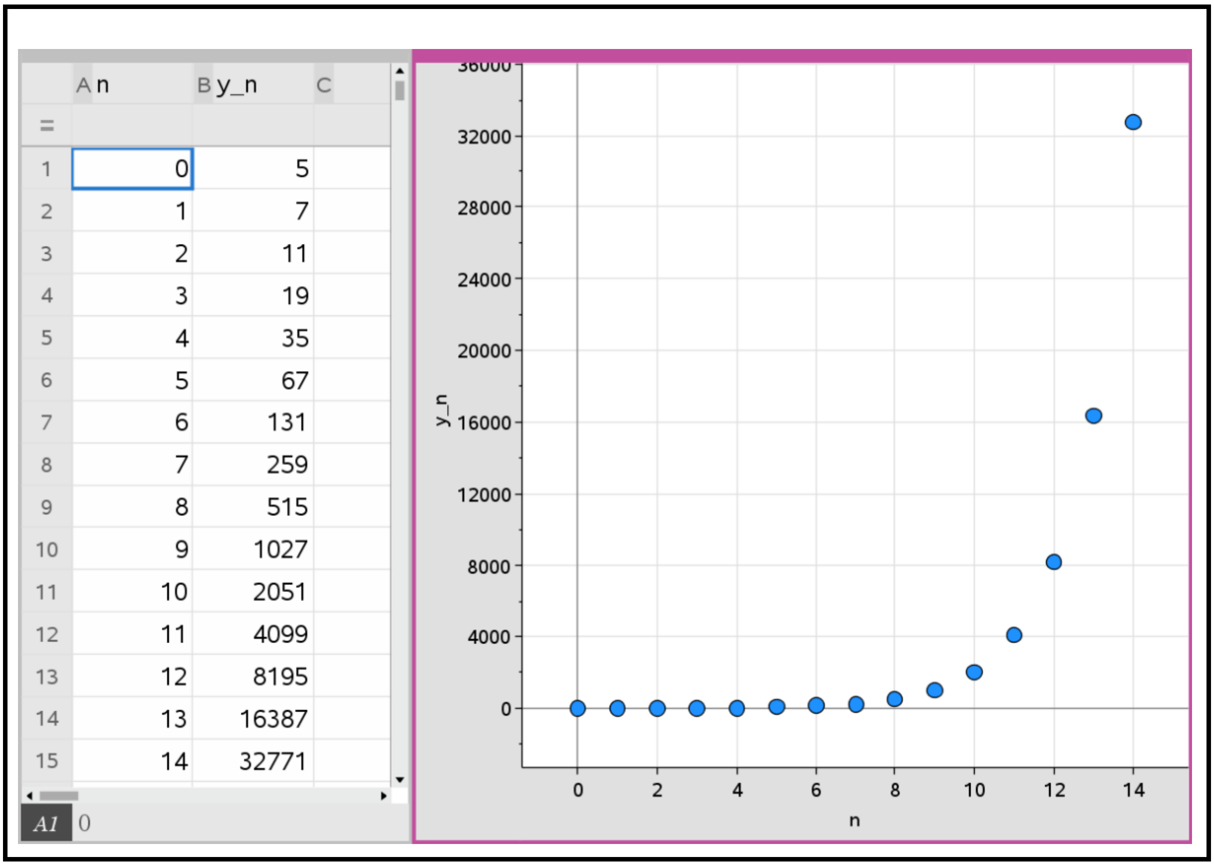
Tegn et punktplot for differensligningen.

Brug først Opskrift 15.1 til at bestemme nogle elementer i talfølgen, eksempelvis de første 15 stk., altså $y_0, y_1, \ldots, y_{14}$. Sørg for at navngive de to søjler i regnearket ved at dobbeltklikke i den øverste grå celle i hver søjle og indtaste et passende navn (f.eks. n og y_n). Tilføj så applikationen *Diagrammer og statistik* ved at klikke på

Indsæt → Diagrammer og statistik

Klik på x-aksen og vælg søjlen der indeholder numrene (n).
Klik på y-aksen og vælg søjlen der indeholder talfølgens elementer (y_n).

Programmet tegner så et punktplot for differensligningen:



	A n	B y_n	C
1	0	5	
2	1	7	
3	2	11	
4	3	19	
5	4	35	
6	5	67	
7	6	131	
8	7	259	
9	8	515	
10	9	1027	
11	10	2051	
12	11	4099	
13	12	8195	
14	13	16387	
15	14	32771	

Eksempel 15.2.2: Tegn punktplot for differensligning (metode 2)

En differensligning er givet ved

$$y_{n+1} = 2 \cdot y_n - 3, \qquad n = 0,1,2,\ldots$$

Det oplyses at $y_0 = 5$.

Tegn et punktplot for differensligningen.

1. Brug Opskrift 15.1 til at bestemme nogle elementer i talfølgen, eksempelvis de første 15 stk., altså y_0, y_1, ..., y_{14}. Sørg for at navngive de to søjler i regnearket ved at dobbeltklikke i den øverste grå celle og indtaste et passende navn (f.eks. n og y_n). Tilføj så applikationen *Grafer* ved at klikke på

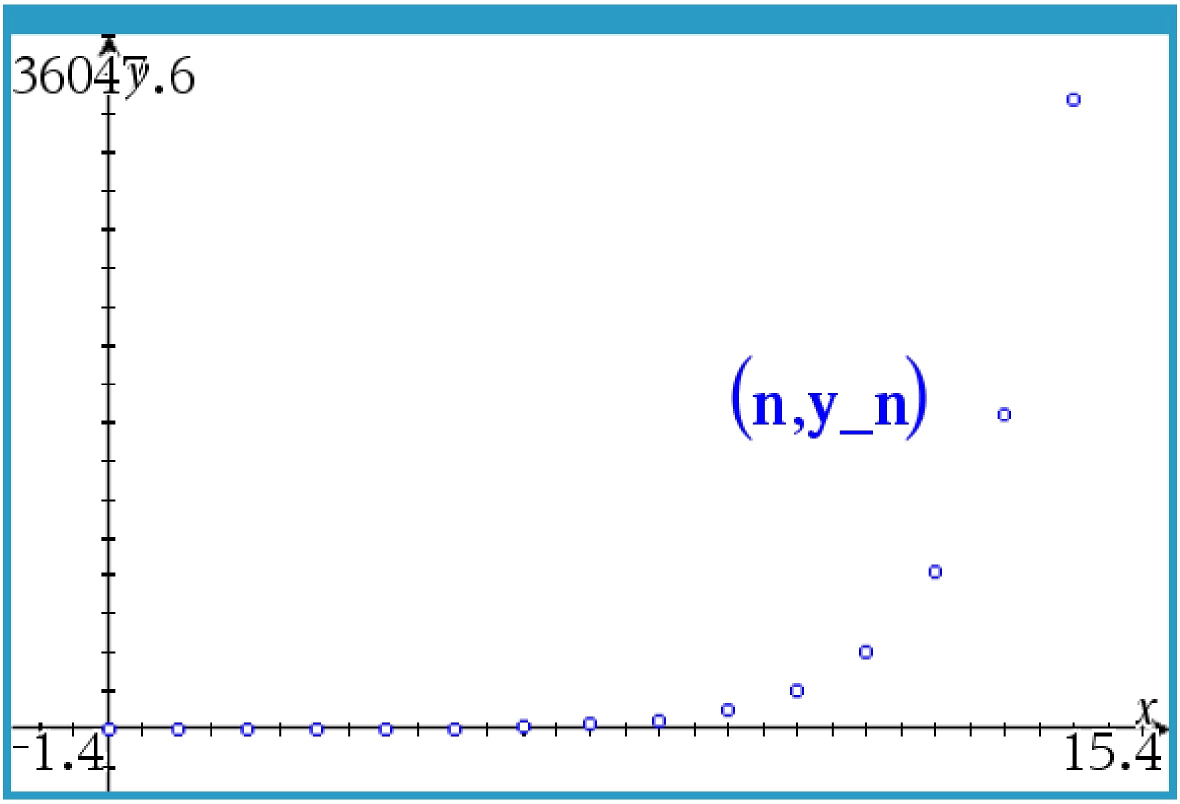
Indsæt → Grafer

2. I *Grafer*: Klik på , vælg *Grafindtastning/Redigér → Punktplot*.

3. Udfyld indtastningslinjen med navnene på de søjler der indeholder hhv. numrene (n) og talfølgens elementer (y_n):

$$\text{s1} \quad \begin{cases} x \leftarrow \mathbf{n} \\ y \leftarrow \mathbf{y\_n} \end{cases}$$

4. Indstil grafvinduet (ved fx at klikke på 🛠 og vælge *Vindue/Zoom* → *Zoom - Fit*).



(Fordelen ved denne fremgangsmåde er at man kan bruge alle faciliteterne fra applikationen *Grafer*).

15.3 Tegn cobwebdiagram

Problem

Du ønsker at tegne et cobwebdiagram for en førsteordens differensligning

$$y_{n+1} = g(y_n), \qquad n = 0,1,2,\ldots$$

Løsning

Brug applikationen *Grafer* til at indtegne grafen for g og grafen for $f(x) = x$.

Eksempel 15.3.1: Tegn cobwebdiagram for differensligning

En differensligning er givet ved

$$y_{n+1} = 4 \cdot y_n - \frac{1}{2} \cdot {y_n}^2, \qquad n = 0,1,2,\ldots$$

Tegn et cobwebdiagram for differensligningen.

1. Bemærk at differensligningen har formen $y_{n+1} = g(y_n)$, hvor

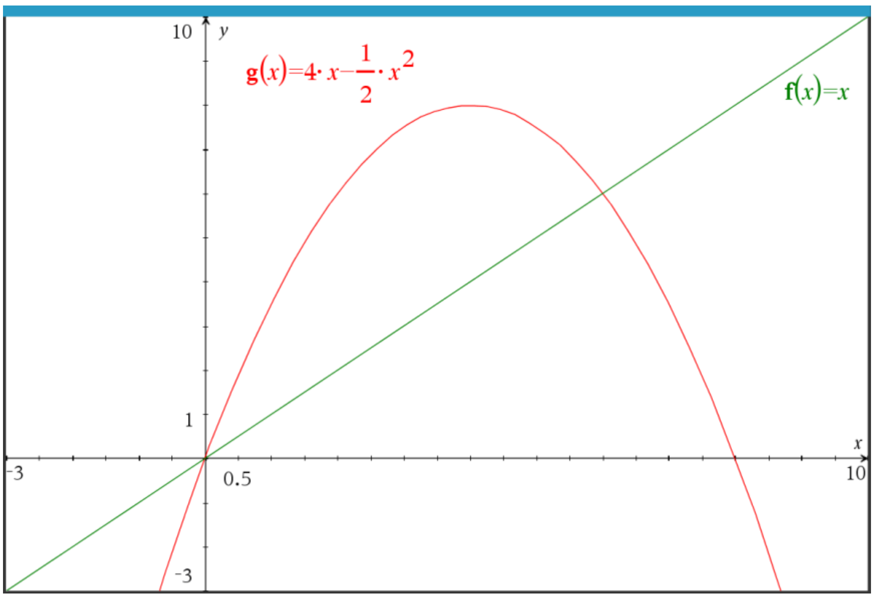
$$g(x) = 4 \cdot x - \frac{1}{2} \cdot x^2.$$

(Funktionen g betegner udtrykket på højre side af differensligningen).

2. Tilføj applikationen *Grafer* ved at klikke på

Indsæt → *Grafer*

3. I *Grafer*: Tegn grafen for g ved at indtaste dens forskrift (Opskrift 1.3). Tegn også grafen for funktionen $f(x) = x$.



(Justér evt. farven på hver graf ved at højreklikke på den vælge *Farve* → *Linjefarve*).

Tip: Grafisk bestemmelse af fikspunkter
Husk at et *fikspunkt* for en differensligning $y_{n+1} = g(y_n)$ er et tal y der opfylder at $g(y) = y$. Fikspunkter kan altså findes grafisk som skæringspunkter mellem de to grafer i cobwebdiagrammet.

15.4 Bestem fikspunkter

Problem

Du ønsker at bestemme eventuelle fikspunkter for en førsteordens differensligning

$$y_{n+1} = g(y_n), \qquad n = 0,1,2,\ldots$$

Løsning

Et *fikspunkt* for en førsteordens differensligning $y_{n+1} = g(y_n)$ er et tal y der opfylder at $g(y) = y$. Fikspunkter kan dermed bestemmes symbolsk ved at løse ligningen $g(y) = y$ (se Eksempel 15.4.1). De kan også bestemmes grafisk ved at finde skæringspunkterne mellem grafen for g og grafen for $f(x) = x$ på et cobwebdiagram (se Eksempel 15.4.2).

Eksempel 15.4.1: Bestem fikspunkter (symbolsk)

En differensligning er givet ved

$$y_{n+1} = 2 \cdot {y_n}^3 - 3 \cdot {y_n}^2 + y_n, \qquad n = 0,1,2,\ldots$$

Bestem de to fikspunkter for differensligningen ved beregning.

1. Bemærk at differensligningen har formen $y_{n+1} = g(y_n)$, hvor

$$g(x) = 2 \cdot x^3 - 3 \cdot x^2 + x.$$

(Funktionen g betegner udtrykket på højre side af differensligningen).

2. Definér funktionen g i Nspire og løs ligningen $g(y) = y$ vha. `solve`:

$$\mathbf{g}(x) := 2 \cdot x^3 - 3 \cdot x^2 + x \;\blacktriangleright\; \mathit{Udført}$$

$$\mathrm{solve}(\mathbf{g}(y) = y, y) \;\blacktriangleright\; y = 0 \text{ or } y = \frac{3}{2}$$

3. Differensligningen har altså to fikspunkter, nemlig 0 og $\frac{3}{2}$.

Eksempel 15.4.2: Bestem fikspunkter (grafisk)

En differensligning er givet ved

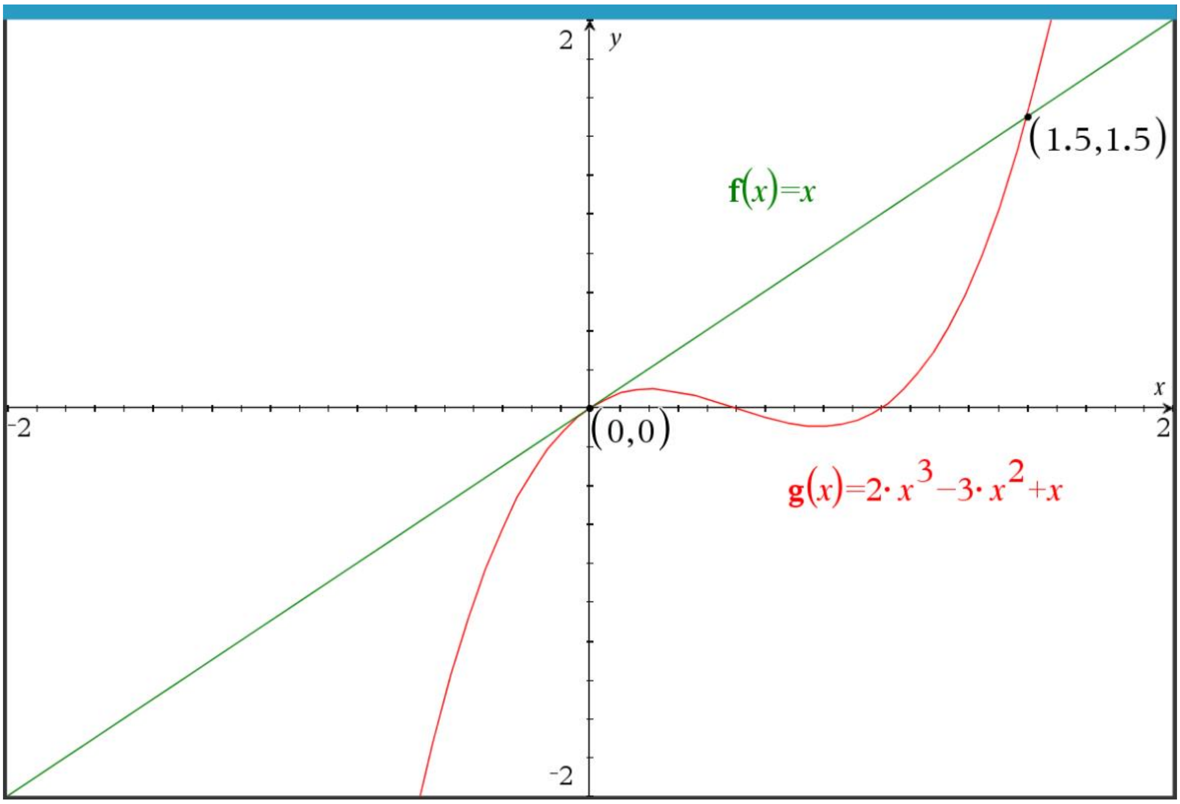
$$y_{n+1} = 2 \cdot {y_n}^3 - 3 \cdot {y_n}^2 + y_n, \qquad n = 0,1,2, \dots$$

Bestem de to fikspunkter for differensligningen grafisk.

Tegn et cobwebdiagram for differensligningen (Opskrift 15.3) og bestem så skæringspunkterne mellem de to grafer ved at klikke på 🛠, vælge

Geometri → Punkter og linjer → Skæringspunkt(er)

og så klikke på de to grafer.



Det ses at differensligningen har to fikspunkter, nemlig 0 og 1,5.

15.5 Undersøg om fikspunkt er stabilt eller ustabilt

Problem

Du kender et fikspunkt y for en førsteordens differensligning $y_{n+1} = g(y_n)$ og ønsker at undersøge om det er stabilt (tiltrækkende) eller ustabilt (frastødende).

Løsning

Ifølge Sætning 2 i forberedelsesmaterialet (formel (F6) i indstiksarket til formelsamlingen) gælder der om et fikspunkt y til $y_{n+1} = g(y_n)$:

- Hvis $|g'(y)| < 1$, så er y et stabilt fikspunkt (tiltrækkende)
- Hvis $|g'(y)| > 1$, så er y et ustabilt fikspunkt (frastødende).
- Hvis $|g'(y)| = 1$, så kan man ikke på baggrund af $g'(y)$ sige noget om fikspunktet.

Man kan derfor undersøge om et fikspunkt y er stabilt eller ustabilt ved at bestemme $|g'(y)|$.

Eksempel 15.5.1: Undersøg fikspunkter

En differensligning er givet ved

$$y_{n+1} = 2 \cdot {y_n}^3 - 5 \cdot {y_n}^2 + 3 \cdot y_n, \qquad n = 0,1,2, \ldots$$

a) Bestem fikspunkterne for differensligningen.
b) Undersøg for hvert af fikspunkterne om det er stabilt eller ustabilt.

a) Fikspunkterne findes ved at følge Opskrift 15.4:

$$\mathbf{g}(x) := 2 \cdot x^3 - 5 \cdot x^2 + 3 \cdot x \ \blacktriangleright \ \mathit{Udført}$$

$$\text{solve}(\mathbf{g}(y) = y, y) \ \blacktriangleright \ y = 0 \text{ or } y = \frac{1}{2} \text{ or } y = 2$$

Det ses at differensligningen har tre fikspunkter, nemlig 0, ½ og 2.

b) Hvert fikspunkt y undersøges nu ved at bestemme $|g'(y)|$:

$$\mathbf{dg}(x) := \frac{d}{dx}(\mathbf{g}(x)) \ \blacktriangleright \ \mathit{Udført}$$

$$\text{abs}(\mathbf{dg}(0)) \ \blacktriangleright \ 3$$

$$\text{abs}\left(\mathbf{dg}\left(\frac{1}{2}\right)\right) \blacktriangleright \frac{1}{2}$$

$$\text{abs}(\mathbf{dg}(2)) \blacktriangleright 7$$

Det ses at

- $|g'(0)| > 1$, så 0 er et ustabilt fikspunkt.
- $\left|g'\left(\frac{1}{2}\right)\right| < 1$, så $\frac{1}{2}$ er et stabilt fikspunkt
- $|g'(2)| > 1$, så 2 er et ustabilt fikspunkt

15.6 Bestem lukket form

Problem

Du ønsker at bestemme en løsning på lukket form til en lineær differensligning af første orden med konstante koefficienter,

$$y_{n+1} = a \cdot y_n + b, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{1}$$

eller til en homogen lineær differensligning af anden orden,

$$y_{n+1} = a \cdot y_n + b \cdot y_{n-1}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{2}$$

Løsning

Fremgangsmåden afhænger af hvilken slags differensligning man har at gøre med. Hvis differensligningen har form som i (1) ovenfor, så skal man gå frem som i Eksempel 15.6.1. Hvis differensligningen har form som i (2) ovenfor, så skal man gå frem som i Eksempel 15.6.2.

Eksempel 15.6.1: Bestem lukket form for $y_{n+1} = a \cdot y_n + b$

En differensligning er givet ved

$$y_{n+1} = 2 \cdot y_n + \frac{1}{2}, \qquad n = 0,1,2, \ldots$$

Det oplyses at $y_0 = 1$.

a) Opskriv løsningen til differensligningen på lukket form.
b) Benyt den lukkede form til at bestemme y_5.
c) Benyt den lukkede form til at bestemme hvornår y_n overstiger 100.

a) Differensligningen har formen

$$y_{n+1} = a \cdot y_n + b, \qquad n = 0,1,2,\dots$$

hvor

$$a = 2, \qquad b = \frac{1}{2}$$

Da $a \neq 0$ og $a \neq 1$, giver Sætning 1 i forberedelsesmaterialet (formel F3 i indstiksarket til formelsamlingen) at den lukkede form er givet ved

$$y_n = a^n \cdot y_0 + b \cdot \frac{a^n - 1}{a - 1}, \qquad n = 0,1,2,\dots$$

Brug Nspire til at udfylde denne formel:

$$\mathbf{y0} := 1 \blacktriangleright 1$$

$$\mathbf{a} := 2 \blacktriangleright 2$$

$$\mathbf{b} := \frac{1}{2} \blacktriangleright \frac{1}{2}$$

$$\mathbf{y}(n) := \mathbf{a}^n \cdot \mathbf{y0} + \mathbf{b} \cdot \frac{\mathbf{a}^n - 1}{\mathbf{a} - 1} \blacktriangleright \mathit{Udført}$$

$$\mathbf{y}(n) \blacktriangleright \frac{3 \cdot 2^n}{2} - \frac{1}{2}$$

Løsningen til differensligningen på lukket form er altså

$$y_n = \frac{3 \cdot 2^n}{2} - \frac{1}{2}, \qquad n = 0,1,2,\dots$$

b) Nu kan y_5 bestemmes ved at indtaste `y(5)`:

$$\mathbf{y}(5) \blacktriangleright 47.5$$

c) Den lukkede form kan også bruges til at bestemme hvornår $y_n > 100$:

$$\text{solve}(\mathbf{y}(n) > 100,\ n) \blacktriangleright n > 6.06609$$

Det ses at y_n overstiger 100 ved $n = 7$.

Eksempel 15.6.2: Bestem lukket form for $y_{n+1} = a \cdot y_n + b \cdot y_{n-1}$ (b ≠ 0)

En andenordens differensligning er bestemt ved

$$y_{n+1} = -y_n + 2 \cdot y_{n-1}, \qquad n = 1,2,3,\dots$$

Det oplyses at $y_0 = 1$ og $y_1 = 7$.

Opskriv løsningen til differensligningen på lukket form.

Differensligningen har formen

$$y_{n+1} = a \cdot y_n + b \cdot y_{n-1}, \qquad n = 1,2,3,\dots$$

hvor

$$a = -1, \qquad b = 2$$

Man kan dermed bruge Sætning 3 i forberedelsesmaterialet (formel (F7)-(F9) i indstiksarket til formelsamlingen) til at bestemme den lukkede form:

1. Definér det karakteristiske polynomium $P(x) = x^2 - a \cdot x - b$ og find rødderne:

$$\mathbf{a} := -1 \;\blacktriangleright\; -1$$

$$\mathbf{b} := 2 \;\blacktriangleright\; 2$$

$$\mathbf{p}(x) := x^2 - \mathbf{a} \cdot x - \mathbf{b} \;\blacktriangleright\; \mathit{Udført}$$

$$\text{solve}(\mathbf{p}(x) = 0,\ x) \;\blacktriangleright\; x = -2 \text{ or } x = 1$$

Det ses at det karakteristiske polynomium har to rødder:

$$m_1 = -2, \qquad m_2 = 1.$$

2. Da der er to forskellige rødder, skal bruge den øverste formel i (F9) fra indstiksarket: $y_n = C_1 \cdot {m_1}^n + C_2 \cdot {m_2}^n$.

$$\mathbf{y}(n) := c1 \cdot (-2)^n + c2 \cdot 1^n \;\blacktriangleright\; \mathit{Udført}$$

3. Brug oplysningerne $y_0 = 1$ og $y_1 = 7$ til at bestemme konstanterne C_1 og C_2.

$$\text{solve}(\mathbf{y}(0) = 1 \text{ and } \mathrm{y}(1) = 7,\ c1,\ c2) \;\blacktriangleright\; c1 = -2 \text{ and } c2 = 3$$

4. Indsæt de fundne værdier for C_1 og C_2 i formlen $y_n = C_1 \cdot {m_1}^n + C_2 \cdot {m_2}^n$.

$$y_n = -2 \cdot (-2)^n + 3 \cdot 1^n, \qquad n = 0, 1, 2, \dots$$

Dette er løsningen til differensligningen på lukket form. Udtrykket på højre side kan for øvrigt reduceres lidt:

$$y_n = (-2)^{n+1} + 3, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

15.7 Newton-Raphsons metode

Problem

Du ønsker at bruge Newton-Raphsons metode til nulpunktsbestemmelse.

Løsning

Newton-Raphsons differensligning er formel (F10) i indstiksarket til forberedelsesmaterialet:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{$*$}$$

Når man har defineret f og f', så kan arbejde med denne differensligning som vist i de foregående opskrifter.

Eksempel 15.7.1: Newton-Raphons metode (med regneark)

En funktion f er givet ved

$$f(x) = x^3 - 2x^2 - 11x + 27.$$

Ligningen $f(x) = 0$ har én løsning.

Benyt Newton-Raphsons metode med startgæt $x_0 = -2$ til at bestemme løsningen til ligningen $f(x) = 0$ med 4 betydende cifre.

1. Definér funktionen:

$$\mathbf{f}(x) := x^3 - 2 \cdot x^2 - 11 \cdot x + 27 \;\blacktriangleright\; \textit{Udført}$$

2. Bestem den afledte funktion $f'(x)$:

$$\mathbf{df}(x) := \frac{d}{dx}\big(\mathbf{f}(x)\big) \;\blacktriangleright\; \textit{Udført}$$

3. Brug Opskrift 15.1 til at bestemme nogle elementer i talfølgen der resulterer fra differensligningen $(*)$ med $x_0 = -2$.

$$=b1-\frac{f(b1)}{df(b1)}$$

	A n	B x_n	C
=			
1	0	-2	-2.
2	1	-17/3	-5.66667
3	2	-12289/2916	-4.21433
4	3	-26309831...	-3.58848
5	4	-28607511...	-3.45771
6	5	-75657317...	-3.45212

$$=\mathrm{approx}(b2)$$

(I den tredje søjle bruges kommandoen

```
=approx(...)
```

for at omdanne de eksakte svar (brøker) til decimalafrundinger).

4. Elementerne x_1, x_2, ..., x_5 ses i søjle C.

5. For at kunne vurdere nøjagtigheden løser vi $f(x) = 0$ med `solve`:

$$\mathrm{solve}(\mathbf{f}(x) = 0,\ x) \ \blacktriangleright\ x=^-3.45211$$

6. Det ses at de første 4 betydende cifre i $x_5 = -3{,}45212$ stemmer overens med de tilsvarende cifre i Nspires løsning. Så vi har nu løst ligningen $f(x) = 0$ med 4 betydende cifre ved hjælp af Newton-Raphsons metode.

Følgende eksempel viser hvordan man kan bruge metoden uden et regneark.

Eksempel 15.7.2: Newton-Raphsons metode (uden regneark)

En funktion f er givet ved

$$f(x) = x^3 - 2x^2 - 11x + 27.$$

Ligningen $f(x) = 0$ har én løsning.

Bestem de første par elementer i løsningen til differensligningen hørende til Newton-Raphsons metode med startgættet $x_0 = -2$.

1. Definér funktionen:

$$\mathrm{f}(x){:=}x^3-2\cdot x^2-11\cdot x+27 \ \blacktriangleright\ \mathit{Udført}$$

2. Bestem den afledte funktion $f'(x)$:

$$\mathbf{df}(x) := \frac{d}{dx}(\mathbf{f}(x)) \ \blacktriangleright\ \mathit{Udført}$$

3. Definér funktionen g, der svarer til højre side af differensligningen $(*)$:

$$\mathbf{g}(x) := x - \frac{\mathbf{f}(x)}{\mathbf{df}(x)} \blacktriangleright \textit{Udført}$$

4. Anvend g gentagne gange, startende med inputtet $x_0 = -2$:

$$\mathbf{x1}:=\mathbf{g}(-2) \blacktriangleright {}^{-}5.66667$$

$$\mathbf{x2}:=\mathbf{g}(\mathbf{g}(-2)) \blacktriangleright {}^{-}4.21433$$

$$\mathbf{x3}:=\mathbf{g}(\mathbf{g}(\mathbf{g}(-2))) \blacktriangleright {}^{-}3.58848$$

Og så videre.

Appendiks 1. Fra komma til punktum

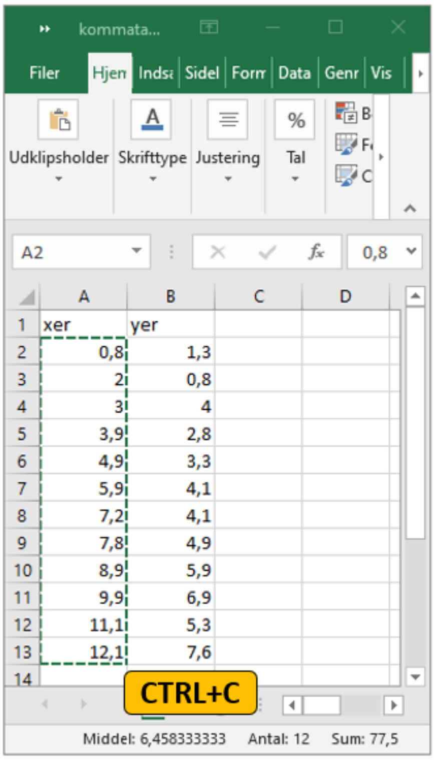
Dette appendiks forklarer hvordan man kan kopiere tal fra Excel over i et program som Nspire eller GeoGebra, der i tal bruger punktummer i stedet for kommaer.

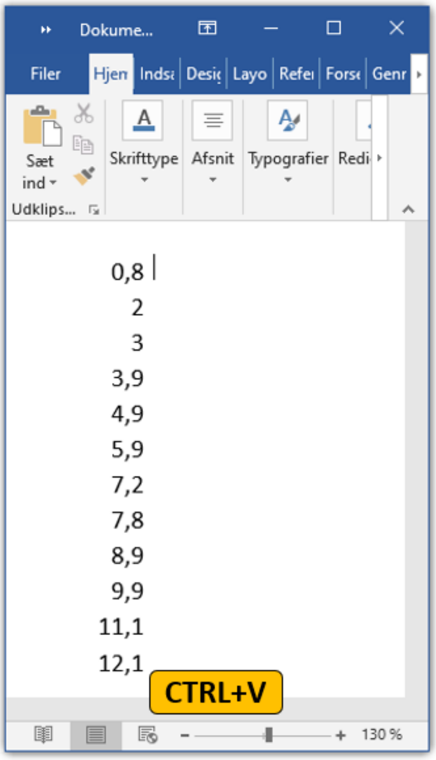
(Obs: På Mac skal man trykke på CMD i stedet for CTRL i instruktionerne nedenfor).

1. Åbn Excel-filen der indeholder dataene.

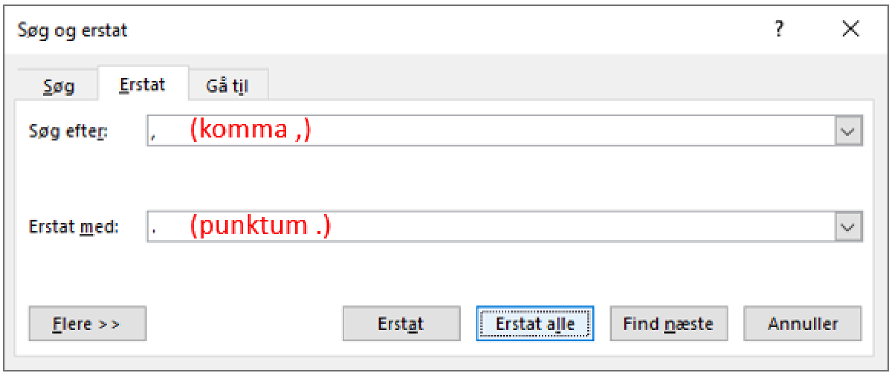
2. Åbn Word og opret et nyt, blankt dokument ved at trykke på CTRL+N.

3. Markér tallene i en af søjlerne i Excel-filen, kopiér dem (CTRL+C) og indsæt dem så i Word-dokumentet (CTRL+V).

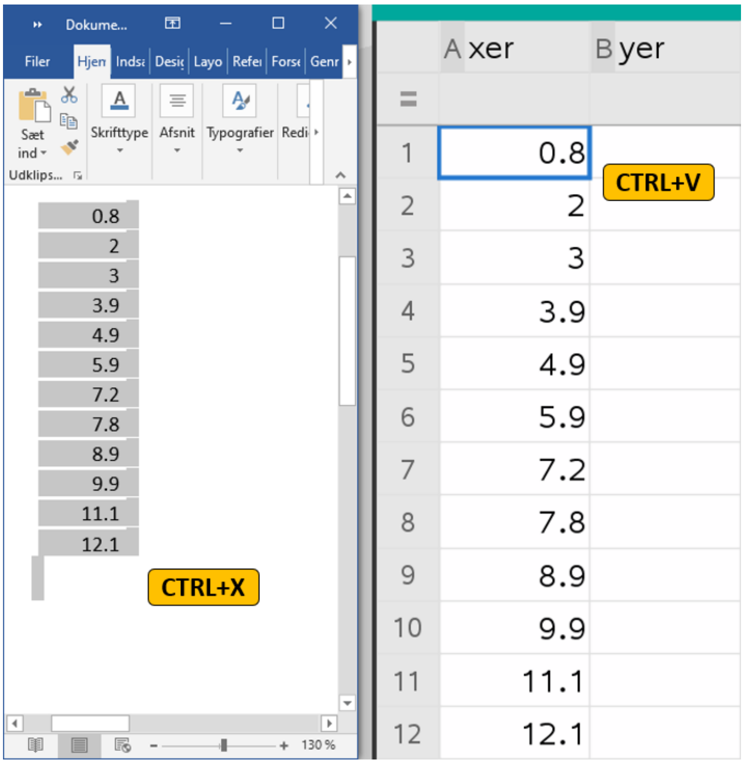




4. I Word: Tryk CTRL+H (Mac: CMD+SHIFT+H) for at åbne værktøjet *Søg og erstat*. Udfyld felterne som vist på nedenfor, og tryk så på knappen *Erstat alle*.



5. Luk vinduet *Søg og erstat*. Markér alt indholdet i Word-dokumentet (CTRL+A), klip (CTRL+X), klik en enkelt gang i Nspires regneark der hvor tallene skal sættes ind og indsæt så tallene (CTRL+V).



6. Gentag proceduren for den anden søjle i Excel-filen.

Hver anden række blank?!
På Mac kan man opleve at når man kopierer dataene over i Nspire, så bliver der indsat en tom række mellem hver af rækkerne i dataene. Dette ser forstyrrende ud, men det er helt harmløst (så længe at det sker i begge søjler), dvs. det har ingen indflydelse på resultaterne af den efterfølgende databehandling.